Technische Universität Clausthal

Institut für Mathematik

Institut für Technische Mechanik

Mathematisches Praktikum

Statik für Heizwände hoher Koksöfen nach der Kirchhoffschen Plattentheorie

vorgelegt von

cand. math. Ralf Deiterding

Betreuende Hochschullehrer: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. U. Mertins
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. B. Zimmermann

Ich versichere hiermit, die vorliegende Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln verfaßt zu haben.

Clausthal-Zellerfeld, 20. Mai 1996

Diese Arbeit wurde im Rahmen des mathematischen Praktikums meines Studiums der Technomathematik erstellt.

Ich danke Herrn Prof. Dr. B. Zimmermann, Institut für Technische Mechanik, für die Formulierung der Themenstellung und Herrn Prof. Dr. U. Mertins, Institut für Mathematik, für die vorrausschauende Auswahl des korrekten Lösungsverfahrens.

Ferner gilt mein Dank Herrn Dipl-Ing. W. Unkenbold, Institut für Technische Mechanik, der mit half, das mathematische Modell zu entwickeln und die gewonnenen Ergebnisse zu interpretieren. Weiterhin danke ich Herrn Dr. H. Behnke, Institut für Mathematik, für die Hilfe bei der Implementierung des Verfahrens und die kritische Durchsicht der Darstellung der zugehörigen theoretischen Grundlagen.

Allen Beteiligten danke ich für das entgegengebrachte große Interesse und für die stetige Diskussionsbereitschaft.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Technische Grundlagen **3**
2.1 Verkokung von Steinkohle . . . 3
2.2 Horizontalkammeröfen . . . 3
2.3 Einflußgrößen für die Festigkeitsanalyse . . . 7

3 Formulierung des Modellproblems **10**
3.1 Modellierung von Heizwand und Belastungen . . . 10
3.1.1 Treibdruckbelastung . . . 12
3.1.2 Thermische Belastung . . . 14
3.2 Linearisierung bei kleiner Durchbiegung . . . 17
3.2.1 Ebener Spannungszustand . . . 19
3.2.2 KIRCHHOFFsche Plattentheorie . . . 20
3.2.3 Erweiterte KIRCHHOFFsche Plattentheorie . . . 20
3.3 v. KÁRMÁNsche Gleichungen für große Durchbiegungen . . . 21
3.4 Einflußnahme der verschiedenen Plattentheorien . . . 22
3.5 Modellproblem . . . 22

4 Lösung des Modellproblems **23**
4.1 Lösung als Variationsproblem . . . 23
4.1.1 Grundlagen über Funktionenräume . . . 23
4.1.2 Formulierung des Variationsproblems . . . 27
4.1.3 Verfahren von TREFFTZ . . . 29
4.1.4 Verfahren von RITZ . . . 31
4.1.5 Anwendung des TREFFTZschen Verfahrens . . . 34

5 Berechnungen **49**
5.1 Rechnung 1 – Heizwand, linearer Treibdruck . . . 49
5.1.1 Parameter . . . 49
5.1.2 Ergebnisse . . . 52
5.2 Rechnung 2 – Heizwand, konstanter Treibdruck . . . 58
5.2.1 Parameter . . . 58
5.2.2 Ergebnisse . . . 59

5.3 Rechnung 3 – Beide Läuferwände 62
5.3.1 Parameter 62
5.3.2 Ergebnisse 63
5.4 Rechnung 4 – Einzelne Läuferwand 66
5.4.1 Parameter 66
5.4.2 Ergebnisse 68
5.5 Auswertung von Rechnung 1 bis 4 71
5.6 Rechnung 5 – Maximale Durchbiegung 72
5.6.1 Parameter - Rechnung 5.1 72
5.6.2 Ergebnisse 73
5.6.3 Parameter - Rechnung 5.2 78
5.7 Auswertung von Rechnung 5 80

6 Zusammenfassung **81**

7 Programm-Code **84**

Abbildungsverzeichnis

2.1 Schema des Koksofenbetriebes 4
2.2 Kreisstrom–Verbund–Koksofen 5
2.3 Baugruppen einer Ofeneinheit 6
2.4 Abmaße des Heizwandkopfes 6

3.1 Plazierung des Koordinatensystems 12
3.2 Einseitige Treibdruckbelastung 13
3.3 Zweiseitige Treibdruckbelastung 13
3.4 Thermische Randbedingungen 15

5.1 Rechnung 1 – Treibdruckbelastung 50
5.2 Rechnung 1 – Thermische Randfunktionen 51
5.3 Rechnung 1 – Thermische Belastung 51
5.4 Rechnung 1 – Durchbiegung 52
5.5 Rechnung 1 – Biegemoment m_x 53
5.6 Rechnung 1 – Biegemoment m_y 53
5.7 Rechnung 1 – Querkraft q_x 54
5.8 Rechnung 1 – Querkraft q_y 54
5.9 Rechnung 1 – Teilspannung $\sigma_x^{(2)}, z = h/2$ 55
5.10 Rechnung 1 – Teilspannung $\sigma_x^{(2)}, z = -h/2$ 55
5.11 Rechnung 1 – Teilspannung $\sigma_y^{(2)}, z = h/2$ 56
5.12 Rechnung 1 – Teilspannung $\sigma_y^{(2)}, z = -h/2$ 56
5.13 Rechnung 1 – Teilspannung $\tau_{xy}^{(2)}, z = h/2$ 57
5.14 Rechnung 1 – Teilspannung $\tau_{xy}^{(2)}, z = -h/2$ 57
5.15 Rechnung 2 – Durchbiegung 59
5.16 Rechnung 2 – Biegemoment m_x 60
5.17 Rechnung 2 – Biegemoment m_y 60
5.18 Rechnung 2 – Querkraft q_x 61
5.19 Rechnung 2 – Querkraft q_y 61
5.20 Rechnung 3 – Thermische Belastung 62
5.21 Rechnung 3 – Durchbiegung 63
5.22 Rechnung 3 – Biegemoment m_x 64
5.23 Rechnung 3 – Biegemoment m_y 64
5.24 Rechnung 3 – Querkraft q_x 65

5.25 Rechnung 3 – Querkraft q_y 65
5.26 Rechnung 4 – Thermische Randfunktionen 67
5.27 Rechnung 4 – Thermische Belastung 67
5.28 Rechnung 4 – Durchbiegung 68
5.29 Rechnung 4 – Biegemoment m_x 69
5.30 Rechnung 4 – Biegemoment m_x 69
5.31 Rechnung 4 – Querkraft q_x 70
5.32 Rechnung 4 – Querkraft q_y 70
5.33 Rechnung 5.1 – max. Durchbiegung w_{max} 74
5.34 Rechnung 5.1 – max. Durchbiegung w^*_{max} 74
5.35 Rechnung 5.1 – x-Koordinate von w_{max} 75
5.36 Rechnung 5.1 – x-Koordinate von w^*_{max} 75
5.37 Rechnung 5.1 – max. Durchbiegung w_{max} (Ausschnitt) 76
5.38 Rechnung 5.1 – max. Durchbiegung w^*_{max} (Ausschnitt) 76
5.39 Rechnung 5.1 – x-Koordinate von w_{max} (Ausschnitt) 77
5.40 Rechnung 5.1 – x-Koordinate von w^*_{max} (Ausschnitt) 77
5.41 Rechnung 5.2 – max. Durchbiegung w_{max} 78
5.42 Rechnung 5.2 – max. Durchbiegung w^*_{max} 78
5.43 Rechnung 5.2 – x-Koordinate von w_{max} 79
5.44 Rechnung 5.2 – x-Koordinate von w^*_{max} 79

Tabellenverzeichnis

2.1 Ausdehnung eines Koksofens durch Erwärmung 7

4.1 Programmausführungszeiten auf 486-33-PC 47

Kapitel 1

Einleitung

Die Verkokung von Steinkohle findet heute praktisch nur noch in sog. Horizontalkammeröfen statt. Moderne Horizontalkammeröfen haben eine Ofenkammerlänge von bis zu 18 m, die Kammerhöhe liegt bei bis zu 8 m. Die Breite einer Ofenkammer hingegen beträgt nur 40–60 cm. Begrenzt wird sie hier durch die sog. Heizwände, deren eigene Breite sich auf ungefähr 1 m beläuft. In einer Ofenbatterie wechseln sich Heizwände und Ofenkammern ab, so daß eine Heizwand an zwei Kammern angrenzt. In vertikaler Richtung durchziehen sog. Heizzüge die Heizwände. In ihnen werden bei Temperaturen von bis zu 1350 °C die Feuerungsgase verbrannt.

Die Auslegeung von Horizontalkammeröfen erfolgt nicht nur anhand statischer Gesichtspunkte. Eine insbesondere für den Betrieb wesentliche Größe ist die Durchbiegung der Heizwände, da am Ende eines Verkokungsprozesse der sog. Stempel der Ausdrückmaschine das Ofenkammerinnere mit sehr geringem Abstand zu den Heizwänden durchfährt. Ist die Durchbiegung bekannt, können aus ihr alle für die Ofenstatik relevanten Größen abgeleitet werden.

Die Durchbiegung wird durch die Funktion $w(x, y)$ beschrieben. Sie ist abhängig von den derzeitigen Innengasdrücken der Verkokungsprozesse der angrenzenden Kammern, dem Gewicht der Ofendecke, den Eigengewichtskräften der Wand und zeitweise auch vom Gewicht des Koks–Füllwagens, der auf der Ofendecke fährt. Weiterhin ist $w(x, y)$ stark temperaturabhängig, und die Temperaturverteilungen auf den Heizwandaußenseiten hängen wesentlich von den angrenzenden Verkokungsprozessen ab. Behinderte Wärmedehnungen aufgrund der hohen Betriebstemperatur haben ebenfalls Einfluß auf die Durchbiegung $w(x, y)$. Entscheidend für die sich aufgrund der genannten Belastungen einstellende Durchbiegung ist die Lagerung der Heizwand.

Die Modellierung einer Heizwand ist nur mit komplizierten Modellen möglich, da die Nachbildung der Hohlstruktur bereits große Schwierigkeiten bereitet. Es ist nicht unmittelbar festzustellen, welche Einflußgrößen für die Durchbiegung wirklich wesentlich sind.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Hohlstruktur der Heizwand vernachlässigt, und ihre Durchbiegung wird mittels Kirchhoffscher Plattentheorie beschrieben. Gewicht der Ofendecke, Eigengewichtskräfte der Wand, Gewicht des Koks–Füllwagens und Behinderung der Wärmedehnungen sind für die Durchbiegung bei Anwen-

dung der KIRCHHOFFschen Plattentheorie unerheblich. In dieser Arbeit wird deshalb der Einfluß dieser Größen unberücksichtigt bleiben, was der bisher gängigen Praxis bei der Ofenkonstruktion entspricht. Denkbare Verbesserungen des thermomechanischen Modells werden vorgestellt, die auch die an dieser Stelle vernachlässigten Größen in die Lösung einbeziehen.

Wesentlicher Gegenstand dieser Arbeit ist die Gegenüberstellung der Durchbiegung und weiterer aus ihr abgeleiteter Größen bei rein thermischer Belastung gegenüber kombinierter themomechanischer Belastung aus Temperatur und Treibdruck.

Kapitel 2

Technische Grundlagen

2.1 Verkokung von Steinkohle

Im 15. Jahrhundert begann in Europa die Eisenerzeugung in großem Stil. Die zu dieser Zeit gebräuchliche Verwendung von Holzkohle zur Verhüttung führte bis zum Ausgang des 16. Jahrhunderts zu einer starken Entwaldung Europas. Ein neuer Brennstoff und zugleich Reduktionsmittel wurde in der Steinkohle gefunden, die in ihrer Rohform aber erhebliche Schwierigkeiten im Betrieb bereitete. Die Kohle schmolz und backte im Ofen zusammen, wodurch der Durchgang des Gebläsewindes stark erschwert wurde. Die Verkokung von Steinkohle und die anschließende Verhüttung von Eisen mit diesem Koks war deshalb erst zu Beginn des 18. Jahrhunderts in technischem Umfang möglich. Wurden zu diesem Zeitpunkt noch 8 t Koks pro Tonne Roheisen benötigt, so sind z. Zt. hierfür etwa noch 450 kg Koks erforderlich [2.1]*.

Verkokung ist das Erhitzen von Kohle unter Luftabschluß. Dabei entweichen entsprechend der Zusammensetzung der Kohle unterschiedliche Mengen an Gasen und Wasser. Zurück bleiben Koks und eine anorganische Phase. Im Fall des Steinkohlenhochtemperaturkoks enthält dieser 98,7 % Kohlenstoff in weitgehend elementarer Form. Steinkohle hingegen hat einen Kohlenstoffanteil von ca. 90 %, wobei der Kohlenstoff zumeist in Molekülen mit zum Teil sehr komplexer Struktur und hohem Molekülgewicht eingelagert ist.

Bei der für diese Arbeit relevanten Hochtemperaturverkokung liegt die Prozeßtemperatur bei über 900 °C.

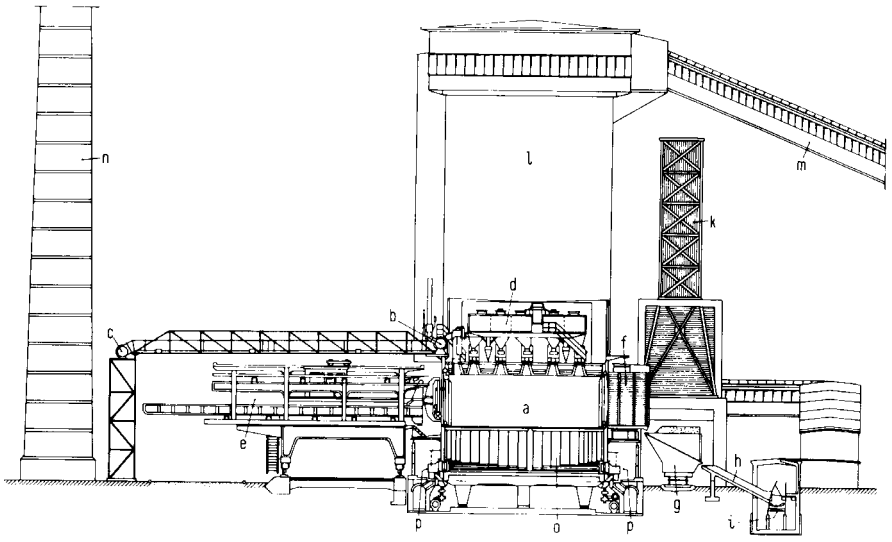
2.2 Horizontalkammeröfen

Für die Verkokung von Steinkohle zur Herstellung von Hochofen– und Gießereikoks hat heute praktisch nur noch der Horizontalkammerofen Bedeutung. Die Bezeichnung bezieht sich auf den horizontalen Bewegungsablauf beim Ausstoßen des Koks.

*Literaturangaben im Rahmen dieser Arbeit beziehen sich stets auf das Literaturverzeichnis auf Seite 85

Die mittlere Kammerbreite liegt zwischen 400 und 600 mm, wobei sich die Kammer zur Koksseite hin erweitert. Die Höhe der Kammern beträgt bei alten Anlagen 4, bei modernen Anlagen bis 8 m, die Kammerlänge liegt zwischen 12 und 18 m [2.1]. Das Volumen beläuft sich sich also auf 20 bis 80 m^3. Die beiden längsseitigen Heizwände haben eine Dicke von ca. 1 m. Durch die Heizwände laufen die senkrechten Heizzüge. In ihnen werden die Feuerungsgase, die sog. Starkgase, bei Temperaturen von 1200–1350 °C verbrannt. Als Baustoff für diesen feuerfesten Teil finden ausschließlich Silikasteine Verwendung. Ihre Druckfeuerbeständigkeit reicht bis 1650 °C [2.4].

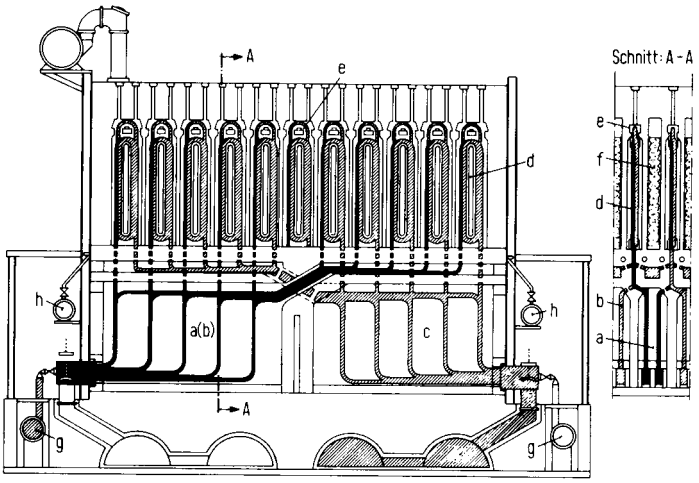
Nach einer Garzeit von 14-20 h werden die Ofentüren maschinell entfernt und der Kokskuchen von der Ausdrückmaschine in den Löschwagen gedrückt. Nach der Reinigung und dem Wiedereinsetzen der Türen wird die Anlage erneut vom Koksofen–Füllwagen von oben befüllt. Die Maschinen sind allesamt fahrbar, so daß sie bis zu 80 solcher Öfen, die in einer Batterie zusammengefaßt sind, bedienen können. Abbildung 2.1 zeigt eine Seitenansicht einer solchen Anlage. Abbildung 2.2 zeigt einen Schnitt durch die Anlage.



a Koksofen
b Vorlage
d Koksofen–Füllwagen
e Koks–Ausdrückmaschine
f Kokskuchen–Führungswagen
g Koks–Löschwagen
h Koksrampe
i Rampenabzugsband zur Sieberei
k Löschturm
l Kohlenturm
m Kohlenzufuhr
o Regenerator
p Begehkanal

Abbildung 2.1: Schema des Koksofenbetriebes aus [2.1]

Eine Ofeneinheit besteht im wesentlichen aus der Ofenkammer und den sie begrenzenden zwei Heizwänden sowie den stirnseitigen Ofentüren. Die beiden Außenseiten einer Heizwand werden durch die sog. Läuferwände gebildet. Sie weisen eine Dicke von 80–100 mm auf.



a luftführende Generatorhälfte
b gasführende Generatorhälfte
c gasabführende Generatorhälfte
d Zwillingsheizzug für Kreisstrombeheizung
e Differentialbeheizung
f Ofenkammer
g Zuführungsleitung für Schwachgas
h Zuführungsleitung für Starkgas

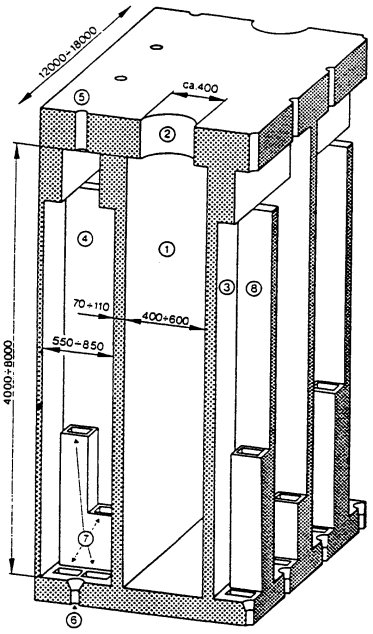
Abbildung 2.2: Kreisstrom–Verbund–Koksofen aus [2.1] (Bauart Krupp–Koppers GmbH, Essen)

Zwischen den Läuferwänden sind die sog. Binderwände eingezogen, die die Heizzüge voneinander abteilen. Die Hohlstruktur der Heizwand wird in Abbildung 2.3 deutlich.

In [2.4] wird eine Bauart beschrieben, bei der die Binderwände im Wechsel als Vollbinder von 130 mm Dicke und als Hohlbinder von 280 mm Dicke ausgeführt sind. Siehe hierzu Abbildung 2.4.

Die Heizwände sind an ihren Stirnenden gelagert. Auf den beiden Stirnflächen einer Heizwand befindet sich je eine Schutzplatte, die sog. Panzerplatte. Sie ist in Längsrichtung zur Wand mit Federn gegen einen mächtigen Doppel–T–Träger aus Stahl abgestützt, dem sog. Querankerständer. Zweck dieser Lagerung ist es, die Ausdehnung der Wand in Längsrichtung durch Erwärmung aufzunehmen und sie gleichzeitig durch geeignete Vorspannung der Federn zu begrenzen. Die Schutzplatte verteilt den Federdruck gleichmäßig auf den Heizwandkopf und schützt ihn gegen plötzliche Temperaturänderungen z.B. durch Spritzwasser. Mächtige Sicherungshaken an Schutzplatte, Decke und Ofentüren verhindern eine Verschiebung des Heizwandkopfes in senkrechter Richtung zur Wandmittelebene.

In Abbildung 2.4 ist die Draufsicht des Heizwandkopfes dargestellt. Die beiden Läuferwände der Heizwand, zwischen denen die Binderwände die einzelnen Heizzüge voneinander abteilen, sind gut zu erkennen. Am eigentlichen Heizwandkopf sitzt die Panzerplatte auf den Läuferstirnflächen auf.



1 Kokskammer
2 Fülloch
3 Läufer
4 Heizzug
5 Schauloch
6 Gaseintritt
7 Lufteintritt
8 Binder

Abbildung 2.3: Baugruppen einer Ofeneinheit aus [2.4]

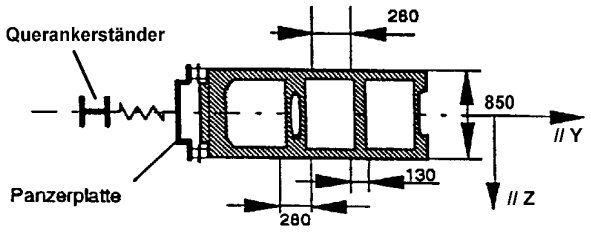


Abbildung 2.4: Abmaße des Heizwandkopfes aus [2.4]

Als Beispiel für die Ausdehnung durch Erwärmung von Einbau– auf Betriebstemperatur seien hier in Tabelle 2.1 die Warm– und Kaltmaße eines Ofens der Versuchskokerei des Steinkohlenbergbauvereins genannt.

Tabelle 2.1: Ausdehnung eines Koksofens durch Erwärmung aus [2.2]

	Kaltmaße [mm]	Warmmaße [mm]
Länge zwischen den Ankerständern	12700	12920
Länge zwischen den Türstopfen	11880	12100
Scheitelhöhe der Kammer	4150	4227
Füllhöhe	3850	–
Kammerbreite (Maschinenseite)	420	410
Kammerbreite (Koksseite)	480	470
Mittlere Kammerbreite	450	440
Stärke der Ofendecke	1000	–
Ofenteilung	1150	–
Ofeninhalt [m^3]	20,65	

Die Ausdehnung einer Heizwand in Längsrichtung ist erheblich.

Problematischerweise ist es aber nicht möglich, die Einbautemperatur als Referenztemperatur zur Berechnung der Wandausdehnung heranzuziehen, da Silikasteine stark temperaturabhängige Materialeigenschaften besitzen. Im besonderen kommt es während des Anheizvorgangs zu Änderungen im Kristallgefüge, die bei einem schnellen Abkühlen des Ofens für dessen Zerstörung verantwortlich sind.

2.3 Einflußgrößen für die Festigkeitsanalyse

Unmittelbar nach dem erstmaligen Anheizen ist eine Heizwand nicht durchgebogen. Entscheidend für die Durchbiegung einer Wand sind verschiedene Zustände beiderseits der Mittelebene und unmittelbar nach dem erstmaligen Anheizen gibt es hier keine Unterschiede. Innerhalb eines Heizzugs ist die Temperatur zwar wesentlich größer als auf den Läuferaußenseiten, Wandstruktur und Temperaturverlauf über die Wanddicke sind aber als symmetrisch zur Mittelebene anzunehmen.

Eine schlagartige Änderung tritt ein, wenn eine Seite mit Kohle beschickt wird. Die Belastung ist nun unsymmetrisch zur Mittelebene. Nur dieser Fall soll in dieser Arbeit behandelt werden, da es unmittelbar einleuchtend ist, daß die Durchbiegung der Wand maximal wird, wenn nur eine Seite beschickt wird. Die Temperaturverläufe über der Wanddicke zwischen Mittelebene und Läuferwandaußenseite sind nun ebenfalls nicht mehr identisch.

Die Druckbelastung auf die Wand durch das Eigengewicht der Kohle ist vernachlässigbar gegenüber dem sog. Treibdruck. Es handelt sich hierbei um die Größe, die aufgrund des Innengasdrucks auf die Ofenwände einwirkt. Wie in 2.1 ausgeführt,

rufen die bei der Erzeugung von Koks entstehenden Gase einen Innengasdruck hervor, der einerseits von der Aufheizgeschwindigkeit, andererseits von spezifischen Eigenschaften der Kohle abhängig ist. Der resultierende Treibdruck ist eine wesentliche Größe für die Ofenstatik und soll ca. 80 mbar nicht überschreiten, um einen sicheren Betrieb zu gewährleisten [2.3].

Aufgrund des Treibdrucks muß sich eine Heizwand folglich zur unbeschickten Seite hin durchbiegen. Die Biegung der Wand, welche durch unterschiedliche Temperaturverläufe beidseitig der Mittelebene induziert wird, kann die Biegung in dieser Richtung unterstützen, ihr aber auch entgegenwirken.

Entscheidend für die Größe der Durchbiegung ist nun einerseits die innere Struktur der Heizwand, die ja aufgrund der Heizzüge keineswegs als Vollplatte angenommen werden kann sowie die Lagerung der Wand. Eine Heizwand ist idealisiert an Ofendecke und Ofenmittelbau als fest eingespannt zu betrachten, an den Stirnenden wird sie mit Hilfe der in 2.2 erwähnten Sicherungshaken in einem Querlager gehalten. Das Querlager verhindert alle Verschiebungen des Heizwandkopfes, bis auf solche in Randnormalenrichtung. Durch die federnde Lagerung gegen den Ankerständer werden zusätzlich Druckkräfte in Randnormalenrichtung auf den Heizwandkopf aufgebracht. Diese Kräfte können sich durch die Aufheizung der Wand von Einbau– auf Betriebstemperatur vergrößern oder auch abschwächen, je nach Vorzeichen des Temperaturausdehnungskoeffizienten α des Mauerwerks.

Weiterhin wirken der Füllwagendruck, das Deckengewicht und Eigengewichtskräfte in Randnormalenrichtung auf eine Heizwand ein.

Ist die Größenordnung der Kräfte in Randnormalenrichtung erheblich größer als die der Kräfte senkrecht zur Mittelebene, haben die Kräfte in Randnormalenrichtung ebenfalls Einfluß auf die Durchbiegung. Das eigentliche Biegeproblem wird zu einem Beulproblem. Da insbesondere die Referenztemperatur zur Berechnung der Temperaturausdehnung nicht bekannt ist, ist nicht ohne weiteres abzuschätzen, wie stark der Einfluß des Beulens auf die Durchbiegung ist.

Kapitel 3

Formulierung des Modellproblems

Die wirklichkeitsgetreue Modellierung der inneren Struktur einer Koksofenheizwand ist äußerst kompliziert. Wir werden deshalb anhand eines Modellproblems versuchen, Aussagen über Einflußgrößen auf das Biegeverhalten einer Koksofenheizwand zu gewinnen.

3.1 Modellierung von Heizwand und Belastungen

- Koordinatensystem
  - Wir plazieren das Koordinatensystem wie in Abbildung 3.1 dargestellt.
- Innere Struktur
  - Wir vernachlässigen die innere Struktur der Heizwand und nehmen sie als homogen an.
- Materialeigenschaften
  - Wir nehmen die Wand als isotrop an.
    Wir übertragen die Materialeigenschaften eines Silikasteins auf die gesamte Wand und vernachlässigen den Einfluß des Fugenmaterials.
  - Silikasteine haben erheblich von der Temperatur abhängige Materialeigenschaften.
    Der Temperaturausdehnungskoeffizient α und der Elastizitätsmodul E werden im Modell jeweils als konstant angenommen, sind aber unter Berücksichtigung der thermischen Randbedingungen für eine mittlere Temperatur zu wählen.
    Die Querkontraktionszahl ν ist unabhängig von der Temperatur.
- Abmessungen
  - Wir bezeichnen die Maße der Wand nach Abbildung 3.1. Die Abmaße entsprechen denen eines modernen Horizontalkammerofens (siehe 2.2).

  - Länge und Breite der Wand sind um einen Faktor von ungefähr 10 größer als die Wanddicke. Die Wand entspricht somit, je nach betrachteter Belastung, mechanisch einer Platte bzw. einer Scheibe.

- Verschiebungen

  - Die Durchbiegung der Wand nehmen wir nicht nur als klein gegenüber ihren Abmessungen in x– und y–Richtung an, sondern wir nehmen sie auch als klein gegenüber h an.

    "Klein" bedeutet in diesem Zusammenhang, daß die max. Durchbiegung min. um den Faktor 5 kleiner als h sein muß [3.2].

  - Die Verschiebungen in x– und y–Richtung sind von wesentlich kleinerer Ordnung als die Durchbiegung in z–Richtung.

- Verzerrungen

  - Die partiellen Ableitungen der Verschiebungen nehmen wir als klein gegenüber 1 an.
  - Die partiellen Ableitungen der Verschiebungen in x– und y–Richtung sind von wesentlich kleinerer Ordnung als die partiellen Ableitungen der Verschiebung in z–Richtung.
  - Es gilt dann in sehr guter Näherung folgender Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungsableitungen:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}u_{i,j} + \frac{1}{2}u_{j,i} \qquad i = 1, 2 \tag{3.1}$$

- Mechanische Belastung

  - Die Wand wird durch den Treibdruck einseitig belastet. Wir beschränken uns also auf den Fall einer einseitig mit Kohle beschickten Wand.
  - Der Treibdruck ist während des Prozesses nicht konstant. Wir rechnen mit der Treibdruckverteilung mit den größten Drücken.
  - Modellierung des Treibdrucks durch die in 3.1.1 formulierte Funktion.
  - Mechanische Belastungen durch Füllwagen, Decke und Eigengewicht der Wand vernachlässigen wir.

- Thermische Belastung

  - Die Heizwand befindet sich auf Betriebstemperatur.

    Es ist möglich, daß es Spannungen in der Wand aufgrund behinderter Wärmedehnung gibt.

  - Wir nehmen den Temperaturübergang zwischen beiden Wandseiten als weitgehend linear über die Wanddicke an.

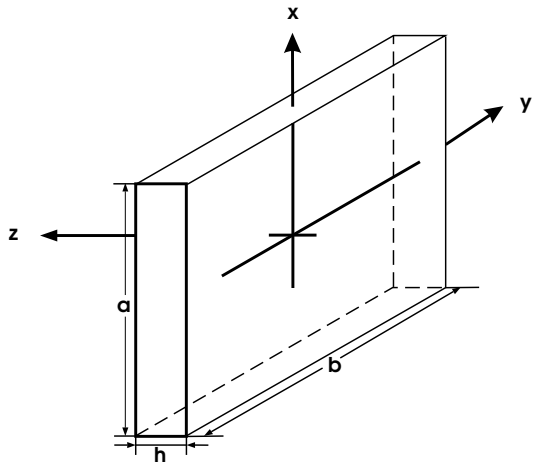
  - Die Heizzüge, die Wärmequellen darstellen, werden wir nicht berücksichtigen.
  - Die Temperaturbelastung ist zeitlich veränderlich. Wir nehmen an, daß innerhalb eines kleinen Zeitabschnitts die Temperaturbelastung als zeitinvariant betrachtet werden kann.
  - Die Wand habe auf beiden Seiten unterschiedliche Temperaturen, da nur eine Seite mit Kohle beschickt sein soll.

    Modellierung der Temperaturverteilung auf den Läuferwandaußenseiten mit den in 3.1.2 angegebenen Funktionen.

    Die angenommene Verteilungen müssen mit der Treibdruckverteilung korrespondieren, um die Realität wiederzugeben.
  - Modellierung der thermischen Belastung durch die in 3.1.2 angegebene Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

- Randbedingungen (Lagerung)
  - Im Rahmen des Modellproblems nehmen wir die Wand als allseitig fest eingespannt an.

    Die Durchbiegung sowie die partielle Ableitung der Durchbiegung in Normalenrichtung sind am Rand Null.



$$\overline{G} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \left[-\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right], y \in \left[-\frac{b}{2};\frac{b}{2}\right], z \in \left[-\frac{h}{2};\frac{h}{2}\right] \right\}$$

Abbildung 3.1: Plazierung des Koordinatensystems

3.1.1 Treibdruckbelastung

Die Treibdruckbelastung ist mittels einer Funktion p in x und y zu formulieren. Aufgrund von Messwerten nehmen wir den Treibdruck als unabhängig von y mit

einer in x linearen Funktion an. Diese Eigenschaft ist zeitinvariant. Wir formulieren die Treibdruckbelastung nun wie folgt:

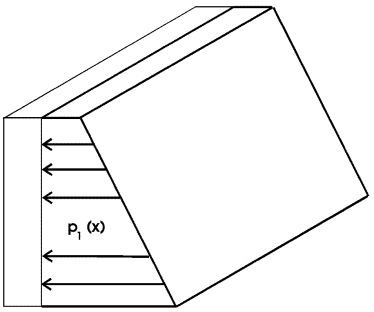
$$p(x,y) = dx + e \qquad (x,y) \in \left[-\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right] \times \left[-\frac{b}{2};\frac{b}{2}\right] \quad d,e \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

Im weiteren werden wir der Einfachheit halber nur noch $p(x)$ schreiben.

Der Treibdruck wirkt als Flächenlast in z–Richtung auf die Wand. Grundsätzlich sind hierbei drei Fälle zu unterscheiden:

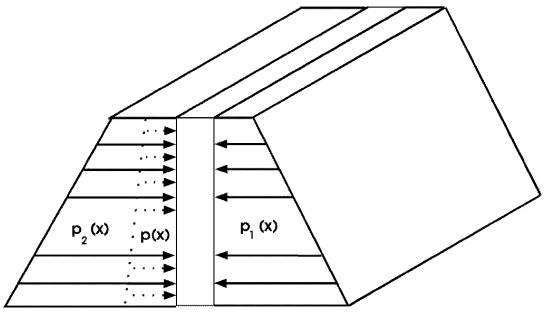
1. Einseitige Treibdruckbelastung (siehe Abbildung 3.2)
2. Zweiseitige Treibdruckbelastung (siehe Abbildung 3.3)
3. Keine Seite beschickt. Das ist der triviale Fall mit $p(x) = 0$.

Wie in 3.1 festgelegt, werden wir uns auf den Fall der einseitigen Treibdruckbelastung konzentrieren. Zu betonen ist aber, daß (3.2) durch geeignete Wahl der Kooeffizienten alle drei Fälle berücksichtigt.



$$\begin{aligned} p(x) &= p_1(x) \\ &= d_1 x + e_1 \end{aligned}$$

Abbildung 3.2: Einseitige Treibdruckbelastung



$$\begin{aligned} p(x) &= p_1(x) - p_2(x) \\ &= (d_1 - d_2)x + (e_1 - e_2) \end{aligned}$$

Abbildung 3.3: Zweiseitige Treibdruckbelastung

Aufgrund der zur Mittelebene der Wand senkrechten Belastungsrichtung entspricht die Treibdruckbelastung mechanisch der Belastung einer Platte.

Die Treibdruckbelastung ist über die Zeitdauer des Garungsprozesses nicht konstant, sondern sie ist am Beginn und Ende praktisch nicht vorhanden. Die zeitliche Abhängigkeit innerhalb des Prozesses wurde aber hier in den Bezeichnungen unterdrückt.

3.1.2 Thermische Belastung

Die thermische Belastung ist mittels einer Funktion T in x, y und z zu formulieren. $T(x, y, z)$ muß auf dem Rand ∂G die geforderten Randbedingungen annehmen. Messungen zeigen auch hier über die gesamte Prozeßdauer weitgehend von y unabhängige Temperaturverteilungen. Für $z = \pm h/2$ lassen sich die thermischen Randbedingungen mit zwei in x quadratischen und von y unabhängigen Funktionen $T_1(x)$ und $T_2(x)$ beschreiben. Abbildung 3.4 veranschaulicht diese Randbedingungen noch einmal. Für $x = \pm a/2$ liegen keine Messwerte vor, wir lassen diese Randfunktionen aber nicht frei, sondern wählen einen polynomialen Ansatz, für den wir für unsere Wandabmessungen und unsere Randfunktionen T_1 und T_2 einen weitgehend linearen Temperaturübergang in z–Richtung fordern.

Die Randfunktionen nehmen wir innerhalb eines kleinen Zeitintervalls als unveränderlich an und Lösen das Wärmeleitungsproblem zu einem festen Zeitpunkt als stationären, in diesem ersten Ansatz wärmequellenfreien, Wärmeleitungsvorgang [3.1]. Es gehören folglich je eine bestimmte Treibdruck– und eine bestimmte Temperaturbelastung zusammen.

Aufgrund der Unabhängigkeit von y schreiben wir nur noch kurz $T(x, z)$, und es gilt die zweidimensionale stationäre Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta T(x,z) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \qquad (x,z) \in \left[-\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right] \times \left[-\frac{h}{2};\frac{h}{2}\right] \tag{3.3}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} T(x, h/2) =& T_1(x) = r_1 x^2 + s_1 x + t_1 \quad r_1, s_1, t_1 \in \mathbb{R} \\ T(x, -h/2) =& T_2(x) = r_2 x^2 + s_2 x + t_2 \quad r_2, s_2, t_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T\left(\pm a/2, z\right) = & \quad \frac{1}{2}\left[r_1\left(1+\frac{2}{h}z\right) + r_2\left(1-\frac{2}{h}z\right)\right]\frac{a^2}{4} \\ & \pm \frac{1}{2}\left[s_1\left(1+\frac{2}{h}z\right) + s_2\left(1-\frac{2}{h}z\right)\right]\frac{a}{2} \\ & + \frac{1}{2}\left[t_1\left(1+\frac{2}{h}z\right) + t_2\left(1-\frac{2}{h}z\right)\right] \\ & + (r_1+r_2)\left(-\frac{z^2}{2} + \frac{h^2}{8}\right) \\ & + (r_1-r_2)\left(-\frac{z^3}{3h} + \frac{h}{12}z\right) \end{aligned}$$

Durch Differenzieren und Einsetzen von $z = \pm h/2$ kann leicht überprüft werden, daß die folgende Funktion Lösung von (3.3) ist und auch die Randbedingungen

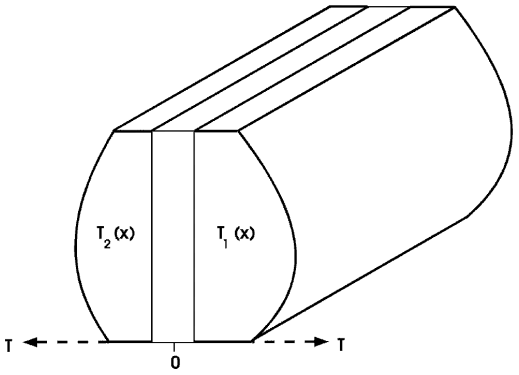


Abbildung 3.4: Thermische Randbedingungen

erfüllt.

$$\begin{aligned} T(x,z) = \quad & \frac{1}{2}\left[r_1\left(1+\frac{2}{h}z\right)+r_2\left(1-\frac{2}{h}z\right)\right]x^2 \\ & +\frac{1}{2}\left[s_1\left(1+\frac{2}{h}z\right)+s_2\left(1-\frac{2}{h}z\right)\right]x \\ & +\frac{1}{2}\left[t_1\left(1+\frac{2}{h}z\right)+t_2\left(1-\frac{2}{h}z\right)\right] \\ & +(r_1+r_2)\left(-\frac{z^2}{2}+\frac{h^2}{8}\right) \\ & +(r_1-r_2)\left(-\frac{z^3}{3h}+\frac{h}{12}z\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

hieraus erhalten wir

$$T(x,z) = T_0(x) + \tau(x)z + g^{(1)}(z) + g^{(2)}(z)\, z \tag{3.5}$$

wenn wir folgende Bezeichnungen einführen:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= \frac{1}{2}\left[T_1(x,y)+T_2(x,y)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(r_1+r_2)\,x^2+(s_1+s_2)\,x+(t_1+t_2)\right] \\ &= r_0x^2+s_0x+t_0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \frac{1}{h}\left[T_1(x,y)-T_2(x,y)\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[(r_1-r_2)\,x^2+(s_1-s_2)\,x+(t_1-t_2)\right] \\ &= rx^2+sx+t \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} g^{(1)}(z) &= (r_1+r_2)\left(-\frac{z^2}{2}+\frac{h^2}{8}\right) \\ &= -r_0\left(z^2-\frac{h^2}{4}\right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} g^{(2)}(z) &= (r_1 - r_2)\left(-\frac{z^2}{3h} + \frac{h}{12}\right) \\ &= -r\left(\frac{z^2}{3} - \frac{h^2}{12}\right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Die Koeffizienten der aus Messungen abgeleiteten Randfunktionen $T1$ und $T2$ sind von solcher Art, daß aus $a \gg h$ folgt

$$\begin{array}{rcl} \left|T_0(\pm\frac{a}{2})\right| & \gg & \left|g^{(1)}(z)\right| \\ \left|\tau(\pm\frac{a}{2})\right| & \gg & \left|g^{(2)}(z)\right| \end{array} \quad \forall\, z \in \left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right]$$

und $T(x, z)$ ist für $x \in [-a/2; a/2]$ weitgehend linear, wie wir es in 3.1 gefordert hatten. (Siehe hierzu Abb. 5.3, 5.3.1, 5.4.1)

3.2 Linearisierung des Problems bei kleiner Durchbiegung

Wie in 3.1 erläutert, nehmen wir die Wand als allseitig festeingespannt in x– und y–Richtung an. Da ihre Ausdehnung hier behindert wird, muß eine Temperaturänderung gegenüber dem spannungsfreien Zustand zu einer Änderung des Gesamtspannungszustands führen. Die Durchbiegung wird als klein gegenüber der Wanddicke h angenommen (siehe hierzu 3.1). Es gilt (3.1).

Die folgenden Ausführungen orientieren sich an [3.4], und auch wir werden im weiteren die Tensorschreibweise benutzen und setzen deshalb $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$. In [3.3] hingegen wird auf die Tensornotation verzichtet.

Nach 3.1 nehmen wir die Wand als homogen und isotrop an und setzen nun linearelastisches Materialverhalten voraus. Erfahrungsgemäß kann σ_{33} unter den gegebenen Vorraussetzungen gegenüber σ_{11} und σ_{22} vernachlässigt werden. Die Querkraftschubverzerrungen ε_{13} und ε_{23} verschwinden gegenüber dem Biegeeinfluß von und ε_{11} und ε_{12}. Wir erhalten deshalb folgendes Stoffgesetz:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(ii)} &= \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\,\sigma_{(ii)} - \nu I_1\right] + \alpha\vartheta \\ & \qquad i = 1,2,3 \qquad I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} \qquad i,j = 1,2 \quad i \neq j \end{aligned} \tag{3.10}$$

Zu beachten ist, daß im Hookeschen Gesetz ϑ, die Differenz zur Temperatur des spannungsfreien Zustands eingesetzt werden muß. Im Falle der vorliegenden Temperaturverteilung aus (3.5) erhalten wir

$$\begin{aligned} \vartheta &= T(x_1, x_3) - C \\ &= \left[T_0(x_1) + g^{(1)}(x_3) - C\right] + \left[\tau(x_1) + g^{(2)}(x_3)\right] x_3 \end{aligned} \tag{3.11}$$

C ist eine vom Ort unabhängige Konstante, die die Vergleichstemperatur angibt, bei der keine Wärmeausdehnungen vorhanden sind.
Wir setzen nun

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} \qquad i,j = 1,2 \tag{3.12}$$

wobei $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ die Anteile aller geraden Funktionen von x_3 enthält. $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ enthält alle Anteile ungerader Funktionen von x_3.

Aufgrund der Vorraussetzungen nehmen wir die Gültigkeit der Bernoullischen–Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte an, d. h. eine Normale zur unverformten Mittelebene bleibt auch nach der Verformung eine Normale. Mit Hilfe dieser Annahme erhalten wir für $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ und $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ in guter Näherung

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{(1)} &= \text{const.} \\ \varepsilon_{ij}^{(2)} &= -x_3\, w_{,ij} \end{aligned} \qquad i,j = 1,2 \tag{3.13}$$

Hierbei ist $w(x_1, x_2)$ die Durchbiegung.

Wir fassen noch einmal zusammen: Nach der angegebenen Linearisierung (3.13) ist die Verzerrungen eines jeden Volumenelements $dx_1\, dx_2\, dx_3$ durch

$$\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon_{ij}^{(1)}(x_1, x_2) - x_3\, w_{,ij}(x_1, x_2) \qquad i, j = 1, 2 \tag{3.14}$$

gegeben. Die Linearisierung gestattet es also, die Verzerrungen des Elements $dx_1 dx_2 dx_3$ aus jeweils einer mittleren Verzerrung und der Verschiebung in x_3–Richtung des wesentlich größeren Elements $dx_1\, dx_2\, h$ abzuleiten.
Auflösen von (3.10) nach σ_{ij} liefert mit obiger Aufspaltung in Anteile gerader und ungerader Funktionen von x_3 mit $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(1)} &= \frac{E}{1-\nu^2}\left\{(1-\nu)\,\varepsilon_{ij}^{(1)} + \left[\nu e^{(1)} - (1+\nu)\,\alpha\left(T_0(x_1) + g^{(1)}(x_3) - C\right)\right]\delta_{ij}\right\} \\ & i, j = 1, 2 \qquad\qquad e^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{22}^{(1)} \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(2)} &= -\frac{E}{1-\nu^2}\left\{(1-\nu)\,w_{,ij} + \left[\nu w_{,kk} + (1+\nu)\,\alpha\left(\tau(x_1) + g^{(2)}(x_3)\right)\right]\delta_{ij}\right\}\, x_3 \\ & i, j = 1, 2 \qquad\qquad w_{,kk} = w_{,11} + w_{,22} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Berechnung der Normalkräfte für jedes Volumenelement $dx_1\, dx_2\, h$

$$n_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}\, dx_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^{(1)}\, dx_3 \tag{3.17}$$

$$= D\left\{(1-\nu)\,\varepsilon_{ij}^{(1)} + \left[\nu e^{(1)} - (1+\nu)\,\alpha\left(T_0(x_1) - C + \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} g^{(1)}(x_3)\, dx_3\right)\right]\delta_{ij}\right\}$$

$$D = \frac{Eh}{1-\nu^2}$$

Berechnung der Biegemomente für jedes Volumenelement $dx_1\, dx_2\, h$

$$m_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}\, x_3\, dx_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^{(2)}\, x_3\, dx_3 \tag{3.18}$$

$$= -N\left\{(1-\nu)\,w_{,ij} + \left[\nu w_{,kk} + (1+\nu)\,\alpha\left(\tau(x_1) + \frac{12}{h^3}\int_{-h/2}^{h/2} g^{(2)}(x_3) x_3^2\, dx_3\right)\right]\delta_{ij}\right\}$$

$$N = \frac{Eh^3}{12\,(1-\nu^2)}$$

Die Vorteile, die aus der Aufteilung von T in in gerade und ungerade Funktionen in x_3 erwachsen, werden an dieser Stelle deutlich.

3.2.1 Ebener Spannungszustand

Die in der Wand aufgrund behinderter Wärmedehnung entstehenden Normalkräfte werden näherungsweise durch die gemittelten Normalkräfte n_{ij} beschrieben. Diese rufen einen sog. ebenen Spannungszustand mit $n_{13} = n_{23} = n_{13}$ hervor und es werden die Kräftegleichgewichtsbedingungen

$$n_{ij,j} = 0 \qquad i,j = 1,2 \tag{3.19}$$

am Volumenelement $dx_1\, dx_2\, h$ erfüllt. Setzen wir (3.17) in (3.19) ein und ersetzen ε_{ij} gemäß (3.1) erhalten wir das folgende System gekoppelter partieller Differentialgleichungen für u_1 und u_2.

$$\begin{aligned}(1-\nu)\,\Delta u_i + (1+\nu)\,u_{j,ij} \\ = 2\,(1+\nu)\,\alpha \left(T_0(x_1) - C + \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} g^{(1)}(x_3)\,dx_3 \right)_{,i} \qquad i,j = 1,2\end{aligned} \tag{3.20}$$

mit den Randbedingungen der festen Einspannung

$$u_i = 0 \qquad i = 1,2 \qquad \text{auf } \partial G \tag{3.21}$$

Das Differentialgleichungssystem (3.20) überführen wir entsprechend [3.1] durch Einführung eines Verschiebungspotentials $\Psi(x_1, x_2)$ mit $u_i = \Psi_{,i}$ in die Differentialgleichung

$$\Delta\Psi = (1+\nu)\,\alpha \left(T_0(x_1) - C + \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} g^{(1)}(x_3)\,dx_3 \right) \qquad i,j = 1,2 \tag{3.22}$$

mit den Randbedingungen

$$\Psi_{,i} = 0 \qquad i = 1,2 \qquad \text{auf } \partial G \tag{3.23}$$

Ersetzen wir gemäß (3.1) ε_{ij} in (3.10) durch $\Psi_{,ij}$, erhalten wir

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \frac{E}{1+\nu}\left\{\Psi_{,ij} - \Psi_{,kk}\delta_{ij}\right\} \qquad i,j,k = 1,2$$

bzw.

$$n_{ij} = h\sigma_{ij}^{(1)} = h\frac{E}{1+\nu}\left\{\Psi_{,ij} - \Psi_{,kk}\delta_{ij}\right\} \qquad i,j,k = 1,2 \tag{3.24}$$

Welchen Fehler wir an dieser Stelle durch die stark vereinfachende Modellierung der mechanischen Randbedingungen machen, ist nicht ohne weiteres abzuschätzen. Die aus behinderter Wärmedehnung resultierenden Spannungen werden im Modell in jedem Fall als zu groß angenommen, da die wirkliche Wand ja federnd gelagert ist, um hier eine Verrringerung zu erzielen. Füllwagendruck, Deckengewicht und Eigengewichtkräfte bleiben an dieser Stelle jedoch unberücksichtigt (die Gleichgewichtsbedingungen (3.19) würden sich ändern !). Erfahrungsgemäß dominieren

Spannungen, die aus behinderter Wärmedehnung resultieren, zumeist jene, die von äußeren Lasten hervorgerufen werden.

Beim Modellproblem interessiert aber nicht der Spannungszustand in der Wand, sondern die Durchbiegung derselben. Im folgenden werden wir festzustellen haben, inwieweit der ebene Spannungszustand überhaupt Einfluß auf die die Biegung beschreibende Funktion $w(x_1, x_2)$ hat.

3.2.2 KIRCHHOFFsche Plattentheorie

Aus der Kräftegleichgewichtsbedingung in x_3–Richtung und den Momentengleichgewichtsbedingungen um die x_1– und x_2–Achse am Volumenelement $dx_1\,dx_2\,h$ erhalten wir die Beziehung

$$m_{ii,jj} + p(x_1) = 0 \tag{3.25}$$

mit $p(x_1)$ aus 3.1.1.

Es ist anzumerken, daß in den Gleichgewichtsbegingungen sehr wohl σ_{13} und σ_{23} berücksichtigt sind, obwohl wir zuvor die Querkraftschubverzerrungen ε_{13} und ε_{23} einfach vernachlässigt hatten. Dies ist eine der Inkonsistenzen in der KIRCHHOFFschen Theorie.

Die Beziehung (3.25) führt auf die bekannte Differentialgleichung der Durchbiegung $w(x_1.x_2)$ der Platte nach KIRCHHOFF

$$\begin{aligned} \Delta\Delta w &= \frac{p(x_1)}{N} - (1+\nu)\,\alpha\Delta\left(\tau(x_1) + \frac{12}{h^3}\int_{-h/2}^{h/2} g^{(2)}(x_3)x_3^2\,dx_3\right) \\ &= \frac{dx_1 + e}{N} - 2\,(1+\nu)\,\alpha r \end{aligned} \tag{3.26}$$

mit den Randbedingungen der festen Einspannung

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \qquad \text{auf } \partial G \tag{3.27}$$

Die Funktion $w(x_1, x_2)$ beschreibt die Verschiebung der Mittelebene der Platte in x_3–Richtung. Wir erkennen unschwer, daß die Durchbiegung w in diesem Fall unabhängig von den Normalkräften n_{ij} ist. Der in 3.2.1 beschriebene ebene Spannungszustand hat also in dieser Formulierung der Durchbiegung keinen Einfluß auf sie.

In [3.1], [3.2] und [3.3] wird nur auf diesen Fall eingegangen.

3.2.3 Erweiterte KIRCHHOFFsche Plattentheorie

Eine wesentliche Grundannahme der KIRCHHOFFschen Theorie besteht darin, die Gleichgewichtsbedingungen (3.25) am unverformten Körper zu betrachten (Theorie 1. Ordnung). Dies ist nicht zulässig, wenn die Durchbiegung zu groß wird (siehe 3.1), aber auch dann nicht, wenn die Durchbiegung zwar klein bleibt, aber die Normalkräfte so groß werden, daß durch sie trotz der kleinen Durchbiegung im Vergleich

zu m_{ij} nicht zu vernachlässigende Biegemomente um x_1– und x_2–Achse auf das Volumenelement $dx_1\, dx_2\, h$ aufgebracht werden. Dieser Fall kann sich aufgrund behinderter Wärmedehnung durchaus einstellen, insbesondere bei einer allseitig festen Einspannung.

Nur in [3.4] wird dieser Fall berücksichtigt.
(3.25) muß dann erweitert werden zu

$$m_{ii,jj} + n_{ij}\, w_{,ij} + p(x_1) = 0 \tag{3.28}$$

(3.26) erweitert sich entsprechend zu

$$\begin{aligned}\Delta\Delta w &= \frac{p(x_1)}{N} - (1+\nu)\,\alpha\Delta\left(\tau(x_1) + \frac{12}{h^3}\int_{-h/2}^{h/2} g^{(2)}(x_3)x_3^2\, dx_3\right) + \frac{h}{N}\sigma_{ij}^{(1)}\, w_{,ij} \\ &= \frac{dx_1 + e}{N} - 2\,(1+\nu)\,\alpha r + \frac{1}{N}\left(n_{,11}w_{,11} + 2n_{,12}w_{,12} + n_{,22}w_{,22}\right)\end{aligned} \tag{3.29}$$

wobei wir n_{ij} aus (3.24) mit der Lösung von (3.22) mit den Randbedingungen (3.23) berechnen können.

Die Randbedingungen transformieren sich nicht und auch hier muß (3.27) gelten.

Der in (3.29) gegenüber (3.26) hinzugekommene Teil erweitert das reine Biegeproblem einer Platte um das sog. Plattenbeulen.

Es ist anzumerken, daß wir auch hierbei noch immer von der Theorie kleiner Verzerrungen ausgegangen sind. Die Durchbiegung ist in dieser Theorie noch immer vernachlässigbar klein gegenüber der Dicke der Platte, und nur dann ist es zulässig (3.1) zu verwenden.

Das Vorgehen zur Lösung von (3.29) ist klar. Die partielle Differentialgleichung (3.22) wird für sich gelöst, und das hier gewonnene Ergebnis wird in (3.29) eingesetzt.

3.3 v. KÁRMÁNsche Gleichungen für große Durchbiegungen

Wird die Durchbiegung "groß", ist (3.1) auch nährungsweise nicht mehr korrekt. Es wird dann

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}u_{i,j} + \frac{1}{2}u_{j,i} + \frac{1}{2}w_{,i}w_{,j} \qquad i = 1,2 \tag{3.30}$$

da gemäß den Verzerrungsaussagen in 3.1 $u_{i,j} \ll w_{,j} \quad i,j = 1,2$ gilt.

Aus (3.30) folgen die v. KÁRMÁNschen Gleichungen für große Verschiebungen. Sie seien hier nur einmal zum Vergleich genannt ([3.4] und [3.2]).

$$\begin{aligned}\Delta\Delta F &= -2\alpha E r_0 + E\left[(w_{,12})^2 - w_{,11}w_{,22}\right] \\ \Delta\Delta w &= \frac{dx_1 + e}{N} - 2\,(1+\nu)\,\alpha r + \frac{1}{N}\left(n_{,11}w_{,11} + 2n_{,12}w_{,12} + n_{,22}w_{,22}\right)\end{aligned} \tag{3.31}$$

wobei $n_{ij} = hF_{ij}$ gilt.

(3.31) ist ein System gekoppelter partieller Differentialgleichungen. Die Lösung ist extrem schwierig und bisher nur für Spezialfälle bekannt.

3.4 Einflußnahme der verschiedenen Plattentheorien auf die Lösung

Die um die Beultherme erweiterte Plattengleichung (3.29) zusammen mit (3.22) beschreibt den Zustand einer isotropen homogenen Wand mit kleinen Verzerrungen vollständig.

Erfahrungsgemäß sind Spannungen, die durch behinderte Wärmedehung hervorgerufen werden, erheblich größer als mechanisch induzierte. Es ist möglich, daß diese Spannungen, obwohl sie in Normalenrichtung wirken, und die Durchbiegung der Heizwand klein ist, wesentlichen Einfluß auf die Durchbiegung haben. Sollte dies der Fall sein, wäre es fehlerhaft, die Durchbiegung allein mit (3.26) zu beschreiben zu versuchen. Wir können dies zu diesem Zeitpunkt aber nicht abschätzen und werden deshalb zunächst den Weg verfolgen, bei dem wir die Durchbiegung als von den Normalkräften unabhängig annehmen.

3.5 Modellproblem

Wir fassen noch einmal zusammen:

Wir betrachten nicht ein beliebig kleines Volumenelement $dx_1\,dx_2\,dx_3$, sondern ein wesentlich größeres Volumenelement $dx_1\,dx_2\,h$, von dessen Belastungen wir aber in sehr guter Näherung auf die des kleinen Volumenelements schließen können.

Die Treibdruckbelastung wird durch (3.2) gegeben, die thermische Belastung durch die Lösung der stationären Wärmeleitungsgleichung (3.4). Treibdruck– und Temperaturbelastung müssen zueinander passen, um die Realität wiederzugeben. Temperaturausdehnungskoeffizient α und Elastizitätsmodul E werden für einen Temperaturmittelwert gewählt.

Die Spannungen des Volumenelements $dx_1\,dx_2\,dx_3$ erhalten wir in guter Näherung durch Addition von $\sigma_{ij}^{(1)}$ aus (3.15) und $\sigma_{ij}^{(2)}$ aus (3.16). $\sigma_{ij}^{(1)}$ erhalten wir aus den partiellen Ableitungen der Lösung der Differentialgleichung des Verschiebungspotentials (3.22) mit den Randbedingungen (3.23). $\sigma_{ij}^{(2)}$ erhalten wir durch Lösung von (3.26) oder (3.29) mit den Randbedingungen (3.27).

Wir werden uns auf den Fall beschränken, die Durchbiegung der Heizwand mittels (3.26) und den Randbedingungen (3.27) anzugeben. In diesem Fall ist die Lösung von (3.22) mit den Randbedingungen (3.23) nicht erforderlich, und die Kenntnis der Gesamtspannungen am Volumenelement $dx_1\,dx_2\,dx_3$ ist von geringerem Interesse. Für die Durchbiegung, die Verschiebung der Plattenmittelebene in x_3–Richtung, sind hingegen die Biegemomente m_{ij} von entscheidender Bedeutung. Sie können durch (3.18) bestimmt werden.

Kapitel 4

Lösung des Modellproblems

Wir formulieren (3.26) mit den zugehörigen Randbedingungen (3.27) etwas allgemeiner und werden eine Lösung der folgenden halbhomogenen elliptischen Differentialgleichung suchen:

$$\boxed{\Delta\Delta w = f \qquad \text{in einem Gebiet } G \text{ des } \mathbb{R}^2} \tag{4.1}$$

mit den Randbedingungen der festen Einspannung

$$\boxed{w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \qquad \text{auf } \partial G} \tag{4.2}$$

4.1 Lösung als Variationsproblem

Die direkten Methoden der Variationsrechnung stellen mächtige Werkzeuge zur Lösung partieller Differentialgleichungen dar. Die Bipotentialgleichung (4.1) als lineare Differentialgleichung kann mit ihrer Hilfe auch für Probleme mit wesentlich komplizierteren Randbedingungen als (4.2) mit geringfügigem Mehraufwand einer Lösung zugeführt werden.

Bevor wir uns den eigentlichen Verfahren zuwenden, werden wir noch einmal einige Begriffe wiederholen.

4.1.1 Grundlagen über Funktionenräume

Banachraum: Linearer Raum, auf dem eine Norm definiert ist. Bezüglich dieser Norm ist der Raum vollständig.

Hilbertraum: Linearer Raum, auf dem ein Skalarprodukt definiert ist. Bezüglich der durch $\| \ \| = (\ , \ )^{1/2}$ definierten Norm ist der Raum ein Banachraum.

Prähilbertraum: Ein Hilbertraum, der nicht notwendigerweise vollständig bez. $\| \ \|$ ist.

$L_2(G)$: Der Raum, der im Sinne von Lebesgue auf G quadratisch integrierbaren Funktionen. Der Raum ist ein Hilbertraum bez.

$$(u,v)_0 = \int_G uv \, dG \qquad\qquad \|u\|_0 = (u,u)^{1/2}$$

$C^k(G)$: Der Raum der auf G mit dem linearen Differentialoperator D^α stetig differenzierbaren Funktionen. $x = (x_1, \ldots, x_N)$ bezeichne ein Element des $\mathbb{R}^N$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ ein N-Tupel nichtnegativer ganzer Zahlen.

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}, \qquad k = |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$$

$C^\infty(G)$: Der Raum der Funktionen, die für alle $k \in \mathbb{N}$ zu $C^k(G)$ gehören.

$C_0^\infty(G)$: Der Raum der sog. Testfunktionen. In ihm sind alle Funktionen aus $C^\infty(G)$ enthalten, die nur auf einem Gebiet $\overline{G_0} \subset G$ nicht identisch Null sind. Hieraus folgt unmittelbar, daß auf dem Rand nicht nur die Funktion selbst, sondern auch ihre Ableitung in Randnormalenrichtung verschwindet.

$H^k(G)$ und $H_0^k(G)$:
Wir definieren nun durch

$$(u,v)_k = (u,v)_0 + \sum_{1 \le |\alpha| \le k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_0$$

ein inneres Produkt auf $C^k(\overline{G})$ und $C_0^\infty(G)$. Bez. der zugehörigen Norm sind beide Räume nicht vollständig, da leicht Cauchyfolgen konstruiert werden können, die gegen Grenzfunktionen konvergieren, die nicht in $C^k(\overline{G})$ bzw. $C_0^\infty(G)$ liegen. Es bezeichne nun $H^k(G)$ bzw. $H_0^k(G)$ die Vervollständigung von $C^k(\overline{G})$ bzw. $C_0^\infty(G)$ zu einem Hilbertraum. ([4.1], 1.1.6)

Die Vervollständigung ist jeweils bis auf lineare Isometrie eindeutig bestimmt. Lineare Isometrie bedeutet in diesem Zusammenhang, daß es unerheblich ist, ein Element der Vervollständigung als Grenzwert u einer Cauchyfolge (u_n) oder als Repräsentant $\widetilde{u}$ einer Klasse äquivalenter Cauchyfolgen (d. h. mit gleichem Grenzwert) bez. der durch $\| \ \|_k = (\ ,\ )_k^{1/2}$ definierten Norm aufzufassen. Bez. $\| \ \|_k$ und einer neuen auf der Menge der Repräsentanten äquivalenter Cauchfolgen durch $\|\widetilde{u}\|_k = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_k$ definierten Norm ist die lineare Struktur und Normierung des Hilbertraums gleich.

Das Rechnen im Hilbertraum kann als Rechnen mit Cauchyfolgen interpretiert werden. Ein Element des Hilbertraums ist eindeutig definiert, wenn aus der zugehörigen Klasse äquivalenter Cauchyfolgen eine spezielle Cauchyfolge angegeben wird. Da $C^k(\overline{G})$ und $C_0^\infty(G)$ dicht bez. $\| \ \|_k$ in $H^k(G)$ bzw. $H_0^k(G)$ liegen, kann jedes Element dieser Hilberträume durch eine abzählbare Folge von Elementen des zugehörigen Prähilbertraums beliebig genau angenähert werden. Insbesondere ist es

ausreichend, eine spezielle Cauchyfolge in $C^k(\overline{G})$ oder $C_0^\infty(G)$ anzugeben, um jedes Element in $H^k(G)$ bzw. $H_0^k(G)$ zu beschreiben.

$C_0^\infty(G)$ liegt dicht in $H^0(G)$, $H_0^0(G)$ und $L_2(G)$ bez. $\| \ \|_0$. Bis auf lineare Isometrie gilt $H^0(G) = H_0^0(G) = L_2(G)$. ([4.1], 1.1.6)

Jedes Element aus $H^0(G)$ bzw. $H_0^0(G)$ bzw. $L_2(G)$ kann durch eine Cauchyfolge aus $C_0^\infty(G)$ oder auch aus $C^0(\overline{G})$ angegeben werden. (Randwerte sind für die Integration bei $\| \ \|_0$ unerheblich!) Da $C_0^\infty(G)$ dicht in allen drei Hilberträumen ist, sind sie linear isometrisch.

Unmittelbar einleuchtend ist folgende Mengenrelation: $H_0^k(G) \subset H^k(G)$.

Funtionen aus $C^k(\overline{G})$ können auch als Funktionen aus $C^{k-1}(\overline{G})$ aufgefaßt werden. Diese Eigenschaft überträgt sich auch auf die Vervollständigungen, und jedes Element aus $H^k(G)$ kann deshalb in natürlicher Weise als Element aus $H^{k-1}(G)$ aufgefaßt werden.

Durch die sog. starke Ableitung D^α wird nun nach [4.1], 1.1.6 jeder Klasse $\widetilde{u}$ äquivalenter Cauchyfolgen aus $H^k(G)$ eindeutig die Klasse $D^\alpha\widetilde{u}$ aus $H^0(G)$ zugeordnet. Elemente aus $H^k(G)$ können auch als Elemente von $H^0(G) = L_2(G)$ aufgefaßt werden, die starke Ableitungen bis zur Ordnung k in $L_2(G)$ besitzen.

$H^k(G)$ und $H_0^k(G)$ werden als *Sobolew-Räume* bezeichnet. Sie sind als Vervollständigungen bez. der Norm $\| \ \|_k$ eingeführt. Über die Vollständigkeit von $H^k(G)$ und $H_0^k(G)$ bez. beliebiger Normen wurde bisher noch nichts ausgesagt.

Zu diesem Zweck führen wir den Begriff der **Äquivalenz zweier Normen** ein:

Sind auf einem Raum E zwei Normen $\| \ \|_a$ und $\| \ \|_b$ definiert, so heißen sie äquivalent, wenn es zwei positive Konstanten c_1 und c_2 gibt, so daß gilt:

$$c_1\|u\|_a \le \|u\|_b \le c_2\|u\|_a \qquad \forall\ u \in E$$

Äquivalenz von Normen bedeutet, daß Folgen aus E die bez. $\| \ \|_a$ gegen einen Grenzwert aus E konvergieren, auch bez. $\| \ \|_b$ konvergieren und zwar gegen denselben Grenzwert. Ist E bez. $\| \ \|_a$ vollständig, so auch bez. $\| \ \|_b$.

Äquivalente Normen in $H^2(G)$ und $H_0^2(G)$:
In Vorbereitung der zu lösenden Aufgabe führen wir zwei Halbnormen in $H^2(G)$ ein:

$$\begin{aligned}
[u,v] &= \left(D^{(2,0)}u, D^{(2,0)}v\right)_0 + 2\left(D^{(1,1)}u, D^{(1,1)}v\right)_0 + \left(D^{(0,2)}u, D^{(0,2)}v\right)_0 \\
\left|u\right| &= [u,u]^{1/2} \\
|u|_2 &= \left(\sum_{|\alpha|=2} (D^\alpha u, D^\alpha u)_0\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Beide Halbnormen sind Normen in $H_0^2(G)$. Wegen

$$\frac{1}{2}\left|u\right| \le |u|_2 \le \left|u\right| \le 2\,|u|_2 \tag{4.3}$$

sind sie in $H_0^2(G)$ einander äquivalent. Zu zeigen ist nun, daß eine der Normen in $H_0^2(G)$ äquivalent zu $\|\ \|_2$ ist, und die Vervollständigung bez. $\left|\!\left|\!\left|\ \right|\!\right|\!\right|$ oder $|\ |_2$ ist dann ebenfalls $H_0^2(G)$. [4.1], 2.2.7, Korollar 1 liefert aber bereits genau diese Aussage.

Ein ähnliche Aussage für $H^2(G)$ abzuleiten, ist schwieriger, da zuerst einmal geeignete Normen auf $H^2(G)$ eingeführt werden müssen.

Wir bezeichnen mit $\mathbb{P}_1(G)$ den Unterraum von $H^2(G)$ der Polynome vom Höchstgrad 1. Durch das orthogonale Komplement von $\mathbb{P}_1(G)$ in $H^2(G)$ bez. $(\ ,\ )_0$ wird ein Unterraum $\mathbb{P}_1^\perp(G)$ von $H^2(G)$ definiert.

$$\mathbb{P}_1^\perp(G) = \left\{ v \in H^2(G)\ ,\ (v,p)_0 = 0 \quad \forall\ p \in \mathbb{P}_1(G) \right\} \tag{4.4}$$

$\left|\!\left|\!\left|\ \right|\!\right|\!\right|$ und $|\ |_2$ definieren Normen auf $\mathbb{P}_1^\perp(G)$, wie leicht nachgeprüft werden kann.

In geeigneter Weise führen wir zwei Abbildungen von $H^2(G)$ in $\mathbb{R}$ ein:

$$\begin{aligned} \left|\!\left|\!\left| u \right|\!\right|\!\right|_{\mathbb{P}_1} &= \left(|u|_{\mathbb{P}_1}^2 + \left|\!\left|\!\left| u \right|\!\right|\!\right|^2 \right)^{1/2} \\ |u|_{\mathbb{P}_1,2} &= \left(|u|_{\mathbb{P}_1}^2 + |u|_2^2 \right)^{1/2} \\ \text{mit} \quad (u,v)_{\mathbb{P}_1} &= (u,1)_0\,(v,1)_0 + (u,x)_0\,(v,x)_0 + (u,y)_0\,(v,y)_0 \\ |u|_{\mathbb{P}_1} &= (u,u)^{1/2} \end{aligned}$$

Satz 1 *$\left|\!\left|\!\left|\ \right|\!\right|\!\right|_{\mathbb{P}_1}$ und $|\ |_{\mathbb{P}_1,2}$ sind zu $\|\ \|_2$ äquivalente Normen auf $H^2(G)$. Es gilt:*

$$\begin{aligned} \left|\!\left|\!\left| u \right|\!\right|\!\right|_{\mathbb{P}_1} &= |u|_{\mathbb{P}_1,2} = |u|_{\mathbb{P}_1} && \forall\ u \in \mathbb{P}_1(G) \\ \left|\!\left|\!\left| u \right|\!\right|\!\right|_{\mathbb{P}_1} &= \left|\!\left|\!\left| u \right|\!\right|\!\right| \ , \quad |u|_{\mathbb{P}_1,2} = |u|_2 && \forall\ u \in \mathbb{P}_1^\perp(G) \end{aligned}$$

und $\left|\!\left|\!\left|\ \right|\!\right|\!\right|$, $|\ |_2$ und $\|\ \|_2$ sind auf $\mathbb{P}_1^\perp(G)$ äquivalente Normen.

Beweis: Offensichtlich ist durch $\left|\!\left|\!\left|\ \right|\!\right|\!\right|_{\mathbb{P}_1}$ und $|\ |_{\mathbb{P}_1,2}$ genau dann eine Norm auf $H^2(G)$ gegeben, wenn $|\ |_{\mathbb{P}_1}$ eine Norm auf $\mathbb{P}_1(G)$ definiert.

Zunächst einmal kann leicht nachgerechnet werden, daß $(\ ,\ )_{\mathbb{P}_1}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{P}_1(G)$ definiert, und damit die SCHWARZsche Ungleichung für $(\ ,\ )_{\mathbb{P}_1}$ in $\mathbb{P}_1(G)$ gilt. Dann sind die Normaxiome nachzuprüfen, wobei beim Beweis der Dreiecksungleichung die Ungleichung $(u,v)_{\mathbb{P}_1} \le |u|_{\mathbb{P}_1}\ |v|_{\mathbb{P}_1}$ zu verwenden ist.

Die Äquivalenz von $\left|\!\left|\!\left|\ \right|\!\right|\!\right|_{\mathbb{P}_1}$ und $|\ |_{\mathbb{P}_1,2}$ erhalten wir analog zu (4.3). Es bleibt also, die Äquivalenz einer dieser Normen mit $\|\ \|_2$ zu prüfen.

[4.1], 2.2.8, Satz 2.17 besagt, daß ein positives c_1 existiert, so daß gilt:

$$c_1 \|u\|_2 \le \left(|u|_{\mathbb{P}_1}^2 + |u|_2^2 \right)^{1/2} = |u|_{\mathbb{P}_1,2} \qquad \forall\ u \in H^2(G)$$

und wir haben nur noch die Existenz einer positiven Konstante c_2 mit

$$|u|_{\mathbb{P}_1,2} \le c_2 \|u\|_2 \qquad \forall\ u \in H^2(G) \tag{4.5}$$

zu zeigen.
Für $u \in \mathbb{P}_1^{\perp}(G)$ ist (4.5) für $c_2 \geq 1$ trivialerweise erfüllt.
Für $u \in \mathbb{P}_1(G)$ ist dann die Existenz einer Konstante $c_2 \geq 1$ mit $|u|_{\mathbb{P}_1} \leq c_2 \|u\|_2$ zu zeigen.

$$
\begin{aligned}
|u|_{\mathbb{P}_1}^2 &= (u,1)_0^2 + (u,x)_0^2 + (u,y)_0^2 \\
&\leq (u,u)_0 (1,1)_0 + (u,u)_0 (x,x)_0 + (u,u)_0 (y,y)_0 \\
&= c^* (u,u)_0 \leq c^* (u,u)_2 = c^* \|u\|_2^2 \leq c_2^2 \, \|u\|_2^2 \\
\text{mit} \quad c_2 &= \begin{cases} \sqrt{c^*} & \text{für } c^* \geq 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{wobei} \quad c^* = (1,1)_0 + (x,x)_0 + (y,y)_0
\end{aligned}
$$

Die weiteren Aussagen in Satz 1 folgen unmittelbar aus den Definitionen von $\| \, \|_{\mathbb{P}_1}$, $| \, |_{\mathbb{P}_1,2}$, $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_1^{\perp}$ und der Äquivalenz der drei Normen in $H^2(G)$. ♦

4.1.2 Formulierung der Differentialgleichung als Variationsproblem

Mit den eingeführten Begriffen erklären wir den linearen Differentialoperator $\Delta\Delta$ als lineare Abbildung von $H^4(G)$ in $L_2(G)$. Den Definitionsbereich für f wählen wir mit $L_2(G)$ möglichst groß. Den Definitionsbereich $W(G)$ für w in (4.1) mit den Randbedingungen (4.2) setzen wir deshalb wie folgt fest:

$$
W(G) := \left\{ w \in H^4(G), w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \partial G \right\} \tag{4.6}
$$

(4.1) wird nun wie folgt erweitert:

$$
\begin{aligned}
& \Delta\Delta w = f \\
\iff \qquad & \int_G \Delta\Delta w \, \varphi \, dG = \int_G f \, \varphi \, dG \qquad \forall \, \varphi \in C_0^{\infty}(G)
\end{aligned}
$$

Nach [4.1], 1.1.6, Satz 1.4, gilt

$$
\int_G (\Delta\Delta w - f) \; \varphi \, dG = 0 \tag{4.7}
$$

genau dann, wenn $\Delta\Delta w = f$ erfüllt ist. Da $(\ ,\ )_0$ aufgrund der Definition von $L_2(G)$ positiv definit auf $L_2(G)$ und damit auch auf $H_0^2(G)$ ist, kann [4.1], 1.1.6, Satz 1.4 auch auf Funktionen $\varphi \in H_0^2(G)$ übertragen werden. Wir erhalten damit für (4.7)

$$
(\Delta\Delta w, \varphi)_0 = (f, \varphi)_0 \qquad \forall \, \varphi \in H_0^2(G) \tag{4.8}
$$

genau dann, wenn $\Delta\Delta w = f$ erfüllt ist.

(4.8) formen wir nun durch Anwendung der zweiten Greenschen Formel in der Form [4.1], (1.41) und unter zweimaliger Verwendung des Gaußschen Integralsatzes in der Form [4.1], (1.36) um. Auftretende Randintegrale verschwinden jeweils wegen $\varphi \in H_0^2(G)$. Es gilt folgende Beziehung:

$$\int_G (w_{xxxx} + 2w_{xxyy} + w_{yyyy})\,\varphi\; dG \\ = \int_G (w_{xx}\varphi_{yy} + 2w_{xy}\varphi_{xy} + w_{yy}\varphi_{yy})\; dG \qquad \forall\; \varphi \in H_0^2(G)$$

und (4.8) wird zu

$$\boxed{\begin{array}{ll} [w,\varphi] = (f,\varphi)_0 & \forall\; \varphi \in U(G) = H_0^2(G) \\ & f \in L_2(G)\;,\; w \in U(G) = H_0^2(G) \end{array}} \tag{4.9}$$

(4.9) bezeichnet man als Variationsformulierung der Differentialgleichung (4.1) mit den Randbedingungen (4.2). Die Randbedinungen sind in diesem speziellen Fall wesentliche Randbedingungen, und es ist keine weitere Beziehung als (4.9) mit der Wahl des Definitionsbereichs für w nötig, um das gesamte Problem vollständig zu beschreiben.

Der Definitionsbereich für w ist mit $U(G) = H_0^2(G)$ allgemeiner gewählt als mit $W(G)$, wie es für das gegebene Problem sinnvoll erscheint. Es stellt sich die Frage, ob eine eventuell vorhandene Eindeutigkeit einer Lösung $\widetilde{w} \in W(G) \subset U(G)$ nicht hierdurch verlorengeht.

Die erforderliche Eindeutigkeitsaussage für eine Lösung $\widetilde{w} \in U(G)$ von (4.9) liefert an dieser Stelle [4.1], 2.2.1, Satz 2.9. Wie in 4.1.1 ausgeführt, definiert $|\!|\!| = [\;,\;]^{1/2}$ eine Halbnorm auf $E(G) = H^2(G)$, aber eine Norm auf $U(G)$. Das sind bereits die Vorraussetzungen, die nötig sind, um [4.1], Satz 2.9 anzuwenden.

$|\!|\!|$ wird auch als *Energienorm* bezeichnet.

Die Existenz einer Lösung $\widetilde{w}$ von (4.9) in $U(G)$ erhalten wir durch Anwendung von [4.1], 2.2.4, Satz 2.12. Neben den Vorraussetzungen für [4.1], 2.2.4, Satz 2.9 muß $U(G)$ bez. $|\!|\!|$ abgeschlossen sein, was aber, wie in 4.1.1 erläutert, aufgrund von [4.1], 2.2.7, Korollar 1 trivialerweise erfüllt ist. Weiterhin muß folgende Beschränkheitsaussage gelten:

$$\exists\; c > 0: \quad |\,(f,\varphi)_0\,| \le c\,|\!|\!|\varphi|\!|\!| \qquad \forall\; \varphi \in U(G) \tag{4.10}$$

Der Nachweis dieser Aussage bereitet mit [4.1], 2.2.7, Korollar 1 keine Probleme, und wir nutzen die Äquivalenz von $|\!|\!|$ und $\|\;\|_2$ in $U(G)$ unmittelbar aus. Durch Anwendung der SCHWARZschen Ungleichung für $(\;,\;)_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} |\,(f,\varphi)_0\,| &\le (f,f)_0^{1/2}\;(\varphi,\varphi)_0^{1/2} \\ &\le (f,f)_0^{1/2}\;(\varphi,\varphi)_2^{1/2} = (f,f)_0^{1/2}\;\|\varphi\|_2 \\ &\le (f,f)_0^{1/2}\;c_2\,|\!|\!|\varphi|\!|\!| = c\,|\!|\!|\varphi|\!|\!| \qquad \forall\; \varphi \in U(G) \end{aligned}$$

(4.10) ist also mit $c = c_2\ (f,f)_0^{1/2}$ erfüllt, wobei die Existenz einer positiven Konstanten c_2 aus der Äquivalenz der Normen folgt. Es sind somit alle Vorraussetzungen für [4.1], Satz 2.12 erfüllt, und der Satz garantiert die Existenz einer Lösung $\widetilde{w}$ in $U(G)$.

Ist in der praktischen Anwendung nun eine Lösung $\widetilde{w} \in U(G)$ von (4.9) gefunden, muß aber noch überprüft werden, ob auch $\widetilde{w} \in H^4(G)$ gilt. Nur in diesem Fall ist $\widetilde{w}$ ein Element des Lösungsraum $W(G)$.

Damit wir haben eine zu (4.6) äquivalente Darstellung für den Lösungsraum gefunden:

$$W(G) = H_0^2(G) \cap H^4(G)$$

4.1.3 Verfahren von Trefftz

Wir führen einen Unterraum von $E(G) = H^2(G)$ ein:

$$V(G) := \left\{ v \in H^2(G)\ ,\ [v,\varphi] = (f,\varphi)_0 \quad \forall\ \varphi \in H_0^2(G) \right\}$$

Das Verfahren von Trefftz beruht nun auf dem folgenden

Satz 2 *Ist $\widetilde{w} \in U(G) = H_0^2(G)$ Lösung von (4.9), dann gilt:*

$$[\widetilde{w},\widetilde{w}] = \min\Big\{ [v,v]\ ,\quad v \in V(G) \Big\} \tag{4.11}$$

Beweis: Für ein beliebiges $v \in V(G)$ ist

$$0 \le [v-\widetilde{w}, v-\widetilde{w}] = [v,v] - 2\,[v,\widetilde{w}] + [\widetilde{w},\widetilde{w}] = [v,v] - [\widetilde{w},\widetilde{w}]$$

$[v,\widetilde{w}] = (f,\widetilde{w})_0$ gilt aufgrund der Definition von $V(G)$. Aber $(f,\widetilde{w})_0$ ist auch identisch $[\widetilde{w},\widetilde{w}]$, da $\widetilde{w}$ ja nach Vorraussetzung Lösung von (4.9) ist.
Es gilt also

$$[\widetilde{w},\widetilde{w}] \le [v,v] \qquad \forall\ v \in V(G)$$

Es ist $\widetilde{w} \in V(G)$, da $\widetilde{w}$ die $V(G)$ definierende Beziehung nach Vorraussetzung erfüllt, und $\widetilde{w} \in H_0^2(G) \subset H^2(G)$ auch zu den zur Definiton von $V(G)$ zugelassenen Funktionen gehört. ⧫

Die Elemente $v \in V(G)$ erfüllen nicht notwendig die Differentialgleichung (4.1), aber alle Partikulärlösungen $v_0 \in H^4(G)$ von (4.1) sind ebenfalls in $V(G)$ enthalten, da $H^4(G) \subset H^2(G)$ und für jede Partikulärlösung gilt nach Vorraussetzung

$$[v_0,\varphi] = (\Delta\Delta v_0, \varphi)_0 = (f,\varphi)_0 \qquad \forall\ \varphi \in H_0^2(G)$$

$\{v_1,\ldots,v_n\} \subset H^4(G)$ sei eine Menge linear unabhängiger Lösungen der homogenen Differentialgleichung $\Delta\Delta w = 0$ ohne Randbedingungen.

Offenbar ist $V(G) \cap [v_1,\ldots,v_n] = \emptyset$.

Aber jede beliebige Linearkombination von Elementen dieser Menge mit einer Partikulärlösung v_0 ist eine Funktion aus $V(G)$. Deshalb ist z.B. auch

$$\left(v_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \right) \in V(G), \quad a_i \in \mathbb{R} \tag{4.12}$$

Satz 3 *Die Extremalaufgabe*

$$\left[v_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \ , \ v_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \right] \longrightarrow \min$$

$$\textit{mit } v_0 \in \left(\mathbb{P}_1^{\perp}(G) \cap V(G) \right), \quad v_i \in \left(\mathbb{P}_1^{\perp}(G) \cap H^4(G) \right) \quad i = 1, \ldots, n$$

besitzt genau eine Lösung $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$*. Sie ist zugleich die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems.*

$$\sum_{i=1}^{n} [v_j, v_i]\, a_i = [v_0, v_j] \qquad j = 1, \ldots, n$$

Beweis: Wir fassen $(v_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i v_i)$ als Funktion von $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ auf, dann muß gelten:

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \left[v_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \ , \ v_0 - \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \right] = 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

Wir erhalten hieraus

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \left([v_0, v_0] + \sum_{i=1,k=1}^{n} [v_i, v_k]\, a_i a_k - 2 \sum_{i=1}^{n} [v_0, v_i]\, a_i \right) =$$

$$2 \sum_{i=1}^{n} [v_i, v_j]\, a_i - 2\, [v_0, v_j] = 0$$

$$\iff \qquad \sum_{i=1}^{n} [v_j, v_i]\, a_i = [v_0, v_j]$$

Nochmaliges Differenzieren liefert die Einträge der Matrix der zweiten partiellen Ableitungen, der Hesseschen Matrix.

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \left(\sum_{i=1}^{n} [v_j, v_i]\, a_i - [v_0, v_j] \right) = [v_j, v_k] \qquad j, k = 1, \ldots, n$$

Die Matrix $\Big([v_j, v_k] \Big)_{1 \le j,k \le n}$ ist unabhängig von $(a_i)_{1 \le i \le n}$, und die Existenz eines globalen Minimums ist genau dann abgesichert, wenn $\Big([v_j, v_k] \Big)_{1 \le j,k \le n}$ positiv definit ist. Die Bedingung ist also:

$$x \Big([v_j, v_k] \Big)_{1 \le j,k \le n} x^{\top} > 0 \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n\,,\ x \neq 0$$

Für beliebige $v_i \in H^4(G) \subset H^2(G)$ erhalten wir aber nur

$$x \Big([v_j, v_k] \Big)_{1 \le j,k \le n} x^\top = \sum_{j=1,k=1}^{n} [v_j, v_k]\, x_j x_k$$
$$= \left[\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \ , \ \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \right] \ge 0 \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n \ , \ x \neq 0$$

da $[\ ,\ ]$ nach 4.1.1 auf $H^2(G)$ ja nur eine Bilinearform definiert. Wird der Definitionsbereich der v_i aber auf $\mathbb{P}_1^\perp(G) \ \cap \ H^4(G)$ eingeschränkt, erhalten wir die gewünschte Beziehung. $\mathbb{P}_1^\perp(G) \ \cap \ H^4(G)$ ist Unterraum, und jede Linearkombination $\sum_{i=1}^n x_i v_i$ ist wieder Element von $\mathbb{P}_1^\perp(G) \ \cap \ H^4(G)$. Auf $\mathbb{P}_1^\perp(G) \ \cap \ H^4(G)$ ist $[\ ,\ ]$ aber nach 4.1.1 ein Skalarprodukt.

Die Koeffizientenmatrix $\Big([v_i, v_j] \Big)_{1 \le i,j \le n}$ des linearen Gleichungssystem zur Bestimmung von $(a_i)_{1 \le i \le n}$ und die Hessesche Matrix stimmen überein. Die Matrix ist für $v_i \in \mathbb{P}_1^\perp(G) \ \cap \ H^4(G)$ regulär, und das lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar. ♦

Es ist nun $[v_0 - \sum_{i=1}^n a_i v_i \ , \ v_0 - \sum_{i=1}^n a_i v_i]$ eine Näherung für $\min \{ [v, v] \, , \ v \ \in \ V(G) \ \} = [\widetilde{w}, \widetilde{w}]$, aber $\widetilde{v} = (v_0 - \sum_{i=1}^n a_i v_i) \in \mathbb{P}_1^\perp(G) \ \cap \ V(G)$ ist i. a. keine Näherungslösung von $\widetilde{w}$. Eine Näherung von $\widetilde{w}$ ist durch $\widetilde{v} \oplus p \, , \ p \in \mathbb{P}_1(G)$ gegeben. p ist die orthogonale Projektion von $\widetilde{w}$ in $\mathbb{P}_1(G)$ bez. $(\ ,\ )_0$.

Entscheidend beim TREFFTZschen Verfahren ist, daß die Lösung $\widetilde{w}$ nicht im Definitionsraum $U(G)$ von (4.9) selbst gesucht wird, sondern in $V(G)$. Da $\widetilde{w}$ ja die eindeutig bestimmte Lösung von (4.9) in $U(G)$ ist, folgt mit $U(G) \subset H^2(G)$ aus der Definition von $V(G)$

$$U(G) \cap V(G) = \{\widetilde{w}\}$$

Das Verfahren von TREFFTZ wird auch als Gegenstück zum weitaus gebräuchlicheren Verfahren von RITZ bezeichnet.

4.1.4 Verfahren von RITZ

Beim Verfahren von RITZ wird das Variationsproblem (4.9) im Unterraum $U(G) = H_0^2(G)$ von $E(G) = H^2(G)$ gelöst.
In Analogie zu Satz 2 formulieren wir

Satz 4 *Ist $\widetilde{w} \in U(G) = H_0^2(G)$ Lösung von (4.9), dann gilt:*

$$-[\widetilde{w}, \widetilde{w}] = \min \Big\{ [u, u] - 2\,(f, u)_0 \ , \quad u \in U(G) \Big\} \tag{4.13}$$

Beweis: Für ein beliebiges $u \in U(G)$ ist

$$0 \le [u - \widetilde{w}, u - \widetilde{w}] = [u, u] - 2\,[u, \widetilde{w}] + [\widetilde{w}, \widetilde{w}] = [u, u] - 2\,(f, u)_0 + [\widetilde{w}, \widetilde{w}]$$

Es folgt

$$-[\widetilde{w},\widetilde{w}] \leq [u,u] - 2\,(f,u)_0 \qquad \forall\ u \in U(G)$$

$[u,\widetilde{w}] = [\widetilde{w},u] = (f,u)_0$ da $\widetilde{w}$ nach Vorraussetzung Lösung von (4.9) ist, und $u \in H_0^2(G)$.

$\widetilde{w} \in U(G)$ ist wegen $U(G) = H_0^2(G)$ trivialerweise erfüllt. ⧫

Elemente u aus $U(G)$ erfüllen nicht die Differentialgleichung (4.1) und auch nicht die zugehörige homogene Differentialgleichung. Dafür erfüllt jede Funktion u und damit auch jede Linearkombination von Elementen aus $U(G)$ die Randbedingungen (4.2).

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) \in U(G), \quad a_i \in \mathbb{R} \tag{4.14}$$

Wir formulieren in Analogie zu Satz 3

Satz 5 *Die Extremalaufgabe*

$$\left[\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\ ,\ \sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right] - 2\left(f\ ,\ \sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right)_0 \longrightarrow \min$$

$$\textit{mit } u_i \in U(G) = H_0^2(G) \quad i = 1,\ldots,n$$

besitzt genau eine Lösung $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$*. Sie ist zugleich die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems.*

$$\sum_{i=1}^{n} [u_j,u_i]\,a_i = (f,u_j)_0 \qquad j = 1,\ldots,n$$

Beweis: Wir fassen $(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i)$ als Funktion von $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ auf, dann muß gelten:

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\ ,\ \sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right] - 2\left(f\ ,\ \sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right)_0\right) = 0 \qquad j = 1,\ldots,n$$

Wir erhalten hieraus

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\sum_{i=1,k=1}^{n} [u_i,u_k]\,a_i a_k - 2\sum_{i=1}^{n} (f,u_i)_0\,a_i\right) =$$

$$2\sum_{i=1}^{n} [u_i,u_j]\,a_i - 2\,(f,u_j)_0 = 0$$

$$\iff \qquad \sum_{i=1}^{n} [u_j,u_i]\,a_i = (f,u_j)_0$$

Nochmaliges partielles Differenzieren liefert die Einträge der Hesseschen Matrix.

$$\frac{\partial}{\partial a_k}\left(\sum_{i=1}^{n}[u_j,u_i]\,a_i-(f,u_j)_0\right)=[u_j,u_k]>0\qquad j,k=1,\ldots,n$$

Die Existenz eines globalen Minimums ist genau dann abgesichert, wenn $\Big([u_j,u_k]\Big)_{1\le j,k\le n}$ positiv definit ist. Die Bedingung ist also:

$$x\Big([u_j,u_k]\Big)_{1\le j,k\le n}x^\top>0\qquad\forall\ x\in\mathbb{R}^n\,,\ x\neq 0$$

Wir erhalten für $u_i\in U(G)$

$$\begin{aligned}x\Big([u_j,u_k]\Big)_{1\le j,k\le n}x^\top&=\sum_{j=1,k=1}^{n}[u_j,u_k]\,x_jx_k\\&=\left[\sum_{i=1}^{n}x_iu_i\ ,\ \sum_{i=1}^{n}x_iu_i\right]>0\qquad\forall\ x\in\mathbb{R}^n\,,\ x\neq 0\end{aligned}$$

da $[\ ,\ ]$ nach 4.1.1 auf $U(G)=H_0^2(G)$ ein Skalarprodukt definiert, und die Bedingung ist für alle $u_i\in U(G)$ erfüllt. Im Gegensatz zum Trefftzschen Verfahren ist das entstehende lineare Gleichungssystem bereits von selbst eindeutig lösbar. ⧫

4.1.5 Anwendung des Trefftzschen Verfahrens

In der Mehrzahl der Fälle ist die Anwendung des Ritzschen Verfahrens dem Trefftzschen Verfahren bei der Lösung partieller Differentialgleichungen vorzuziehen, da es meist schwierig ist, beliebig viele linear unabhängige Lösungen der homogenen Differentialgleichung anzugeben. Dies trifft auf die uns vorliegende Bipotentialgleichung aber nicht zu. Für sie sind Lösungen der homogenen Differentialgleichung in großer Zahl bekannt. Da im vorliegenden Problem alle Randbedingungen wesentlich sind, sind an die Ansatzfunktionen des Trefftzschen Verfahrens keine weiteren Randbedingungen zu stellen, und alle bekannten Lösungen der homogenen Bipotentialgleichung kommen in unserem Fall als Ansatzfunktionen in Frage.

Das Ritzsche Verfahren ist bei den gegebenen Randbedingungen keine gute Wahl, da die Auswahl der Ansatzfunktionen bereits große Sorgfalt erfordert. Die wesentlichen Randbedingungen werden noch von vielen verschiedenen Klassen von Funktionen erfüllt, aber die wenigsten versprechen eine rasche numerische Konvergenz gegen die Lösung $\widetilde{w}$.

Wahl geeigneter Ansatzfunktionen

Ansatzfunktionen v_i, die die homogene Bipotentialgleichung erfüllen, entnehmen wir [4.3], Abschnitt 5:

$$P_{0,0}(u,v)=1 \quad P_{0,1}(u,v)=v \quad P_{1,0}(u,v)=u \quad P_{1,1}(u,v)=uv \tag{4.15}$$

$$\left.\begin{aligned}
P_{2n,0}(u,v) &= \sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{\nu}\binom{2n-1}{2\nu}u^{2n-2\nu}v^{2\nu} \\
P_{2n,1}(u,v) &= \frac{1}{2n}\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{\nu}\binom{2n}{2\nu+1}u^{2n-2\nu}v^{2\nu+1} \\
P_{2n+1,0}(u,v) &= \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{\nu}\,(n-\nu)\binom{2n+1}{2\nu}u^{2n+1-2\nu}v^{2\nu} \\
P_{2n+1,1}(u,v) &= \frac{1}{2n\,(n+1)}\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{\nu}\,(n-\nu)\binom{2n+2}{2\nu+1}u^{2n+1-2\nu}v^{2\nu+1}
\end{aligned}\right\}\ (n\geq 1)$$

Die Sätze in [4.3], Abschnitte 2 und 3 besagen, daß wir alle überhaupt existierenden Polynome, die die homogene Bipotentialgleichung erfüllen, erhalten, wenn wir in (4.15) $u=x, v=y$ und $u=y, v=x$ einsetzen und die Gesamtheit der so entstehenden Polynome in beliebiger Weise linear kombinieren.
Wir setzen:

$$P_{i,j}=P_{i,j}(x,y) \text{ und } P_{j,i}=P_{i,j}(y,x) \qquad (x,y)\in\overline{G}$$

Der Grad der Polynome $P_{i,j}$ und $P_{j,i}$ ist gleich $i+j$.

Die Polynome $P_{i,j}$ sind linear unabhängig und spannen den Raum $\Pi(G)$ auf. Es ist $\mathbb{P}_1(G)\subset\Pi(G)$. Trivialerweise gilt $\Pi(G)\subset H^4(G)$.

$\Pi(G)$ zerfällt in vier disjunkte Unterräume, die jeweils unterschiedliche Symmetrieeigenschaften besitzen.

$$\Pi_1(G) = \Big[\{P_{2n,0},\ n \in \mathbb{N}\}\ ,\ \{P_{0,2n},\ n \in \mathbb{N}\}\ ,\ P_{0,0}\Big]$$

Der Unterraum der in x und y symmetrischen biharm. Polynome

$$\Pi_2(G) = \Big[\{P_{2n,1},\ n \in \mathbb{N}\}\ ,\ \{P_{1,2n},\ n \in \mathbb{N}\}\ ,\ P_{0,1}\Big]$$

Der Unterraum der in x sym. und in y antim. biharm. Polynome

$$\Pi_3(G) = \Big[\{P_{2n+1,0},\ n \in \mathbb{N}\}\ ,\ \{P_{0,2n+1},\ n \in \mathbb{N}\}\ ,\ P_{1,0}\Big]$$

Der Unterraum der in x antim. und in y sym. biharm. Polynome

$$\Pi_4(G) = \Big[\{P_{2n+1,1},\ n \in \mathbb{N}\}\ ,\ \{P_{1,2n+1},\ n \in \mathbb{N}\}\ ,\ P_{1,1}\Big]$$

Der Unterraum der in x und y antimetrischen biharm. Polynome

Die Unterräume $\Pi_i(G)$ sind bez. $(\ ,\ )_0$ paarweise orthogonal.
$[\ ,\ ]$ definiert auf $\Pi(G)$ nur eine Bilinearform, auf

$$\widehat{\Pi}^{\perp}(G) = \{v \in \Pi(G)\ ,\ (v,p)_0 = 0 \quad \forall\ p \in \mathbb{P}_1(G)\}$$

aber ist $[\ ,\ ]$ ein Skalarprodukt, da $\widehat{\Pi}^{\perp}(G) \subset \mathbb{P}_1^{\perp}(G)$ gilt. (Siehe 4.1.1)
Bezeichnen wir die Orthogonalisierung von $\Pi_i(G)$ mit $\mathbb{P}_1(G)$ bez. $(\ ,\ )_0$ mit $\widehat{\Pi}_i^{\perp}(G)$, zerfällt auch $\widehat{\Pi}^{\perp}(G)$ in vier disjunkte Unterräume $\widehat{\Pi}_i^{\perp}(G)$. Die Unterräume $\widehat{\Pi}_i^{\perp}(G)$ sind nicht nur orthogonal bez. $(\ ,\ )_0$, sondern auch bez. $[\ ,\ ]$. Die Bilder zweier Elemente aus $\widehat{\Pi}^{\perp}(G)$ bez. der linearen Abbildung der Differentiation bei der Bildung von $[\ ,\ ]$, die verschiedenen Unterräumen $\widehat{\Pi}_i^{\perp}(G)$ entstammen, liegen ebenfalls in verschiedenen Unterräumen $\widehat{\Pi}_i^{\perp}(G)$. Aus der Orthogonalität der Unterräume $\widehat{\Pi}_i^{\perp}(G)$ bez. $(\ ,\ )_0$ folgt damit auch die Orthogonalität der $\widehat{\Pi}_i^{\perp}(G)$ bez. $[\ ,\ ]$.

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften der $\Pi_i(G)$ wird der Unterraum $\Pi_i(G) \cap \mathbb{P}_1(G)$ für $i = 1,2,3$ nur von dem Basiselement $P_{k,l} \in \Pi_i(G)\ ,\ k+l \leq 1$ aufgespannt. Für $i = 4$ gilt $\Pi_4(G) \cap \mathbb{P}_1(G) = \emptyset$. Für $i = 1,2,3$ ist $\widehat{\Pi}_i^{\perp}(G)$ also das orthogonale Komplement von $[P_{k,l}]$ in $\Pi_i(G)$. Für $i = 4$ gilt $\Pi_4(G) = \widehat{\Pi}_4^{\perp}(G)$.
Eine Basis von $\widehat{\Pi}_i^{\perp}(G)$ für $i = 1,2,3$ erhalten wir durch geeignete Linearkombination eines jeden Basiselements $P_{r,s} \in \Pi_i(G)\ ,\ r+s \geq 2$ mit $P_{k,l} \in \Pi_i(G)\ ,\ k+l \leq 1$.
Es muß gelten

$$\Big(P_{r,s} + a_{klrs}P_{k,l}\ ,\ P_{k,l}\Big)_0 = 0 \qquad \text{für } a_{klrs} \in \mathbb{R} \tag{4.16}$$

Wir erhalten durch einfache Umformung

$$a_{klrs} = -\Big(P_{r,s}\ ,\ P_{k,l}\Big)_0 : \Big(P_{k,l}\ ,\ P_{k,l}\Big)_0 \tag{4.17}$$

Wir definieren

$$P_{r,s}^{\perp} = P_{r,s} \; + \; a_{klrs} P_{k,l}$$

Wählen wir linear unabhängige Ansatzfunktionen v_i für das TREFFTZsche Verfahren und eine geeignete Partikulärlösung v_0 aus $\widehat{\Pi}^{\perp}(G)$, erfüllt jede beliebige Linearkombination $v_0 \; - \sum_i \; c_i \; v_i$ die Differentialgleichung (4.1). Die Koeffizientenmatrix des sich ergebenden linearen Gleichungssystem hat maximalen Rang, und das Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung (c_i). Trotzdem werden die Randbedingungen (4.2) im allgemeinen nicht erfüllt. Erst bei Addition eines geeigneten Elements p aus $\mathbb{P}_1(G)$ werden auch die Randbedingungen eingehalten.

Die Bildung einer Basis der orthogonalen Komplemente $\widehat{\Pi}_i^{\perp}(G)$ läßt sich nicht in einen allgemeinen Algorithmus fassen, da $\widehat{\Pi}_4^{\perp}(G)$ gesondert behandelt werden muß. Einfacher ist es, statt $\widehat{\Pi}^{\perp}(G)$ eine Menge $\Pi^{\perp}(G)$ wie folgt zu definieren:

$$\Pi^{\perp}(G) = \Big\{ v \in \Pi(G) \; , \; (v,p)_0 = 0 \quad \forall \; p \in [\mathbb{P}_1(G) \; , \; P_{1,1}] \Big\}$$

Es gilt $\widehat{\Pi}_i^{\perp}(G) = \Pi_i^{\perp}(G)$ für $i = 1,2,3$. $\Pi_4^{\perp}(G)$ wird mit $k = l = 1$ gemäß (4.16) und (4.17) bestimmt. [,] ist auch auf $\Pi_4^{\perp}(G)$ Skalarprodukt, da ja $\Pi_4^{\perp}(G) \subset \widehat{\Pi}_4^{\perp}(G)$ gilt. In diesem Fall ist ein geeignetes Element p aus $[\mathbb{P}_1(G) \; , \; P_{1,1}]$ zu der Summe $v_0 \; - \sum_i \; c_i \; v_i$ zu addieren, um die Randbedingungen einzuhalten.

Die Auswahl von Ansatzfunktionen aus $\Pi^{\perp}(G)$ erfolgt nun in der folgenden Weise: Der zu wählende Parameter für die Zahl der Ansatzfunktionen sei $n \in \mathbb{N}$. Aus jedem Raum $\Pi_i^{\perp}(G) \; , \; i = 1,2,3,4$ werden als Ansatzfunktionen die $2n$ linear unabhängigen Polynome $P_{r,s}^{\perp}$ mit niedrigstem Grad ausgewählt. Die Gesamtzahl der linear unabhängigen Ansatzfunktionen ist also $4 \cdot 2n$. Aufgrund der paarweisen Orthogonalität der Unterräume $\Pi_i^{\perp}(G)$ zerfällt das beim TREFFTZschen Verfahren entstehende lineare Gleichungssystem mit $4 \cdot 2n$ Unbekannten in vier lineare Gleichungssysteme mit je $2n$ Unbekannten.

Nach Lösung der linearen Gleichungssysteme ist unter Berücksichtigung der gewählten Partikulärlösung eine geeignete Linearkombination von $P_{0,0}, P_{0,1}, P_{1,0}$ und $P_{1,1}$ zur die Lösung angebenden Reihe hinzuzuaddieren, um die Randbedingungen einzuhalten.

Offen bleibt die Frage, ob die in Abhängigkeit vom Parameter n gegebenen Näherungslösungen des TREFFTZschen Verfahrens $\widetilde{v}_n \oplus p_n$ wirklich mit wachsendem n gegen die Lösung $\widetilde{w}$ aus $H_0^2(G) \cap H^4(G)$ konvergieren. Diese Frage ist nicht leicht zu beantworten, und wir werden deshalb an dieser Stelle von einer Diskussion Abstand nehmen. Stellen wir allerdings, nach Implementation des Verfahrens in der erläuterten Art und Weise, numerische Konvergenz der Folge $(\widetilde{v}_n \oplus p_n)$ fest, so kann es sich hierbei aufgrund der bewiesenen Eindeutigkeit der Lösung $\widetilde{w}$ nur um Konvergenz gegen die Lösung $\widetilde{w}$ handeln, da ja nach obigem Verfahren auch die Randbedingungen stets eingehalten werden.

Formulierung des Algorithmus

Zur Vereinfachung definieren wir für jeden Raum $\Pi_i^{\perp}(G)$, $i = 1, 2, 3, 4$ je eine Abbildungen $S_i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Wir denken uns die den Raum $\Pi_i^{\perp}(G)$ aufspannenden Polynome $P_{r,s}^{\perp}$ nach ihrem Grad geordnet, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit bei Gradgleichheit zweier Polynome das Polynom mit dem in x höheren Grad vorziehen. S_i ordnet nun gemäß dieser Ordnungsrelation jeder natürlichen Zahl n ein von i abhängiges Tupel (r, s) zu.

Eingabe aller erforderlichen Parameter

Bildung einer festen Partikulärlösung v_0 unter Berücksichtigung der eingegebenen Parameter

Wahl von n. Zahl der Ansatzfunktionen: $4 \cdot 2n$

$i \in \{1, 2, 3, 4\}$

- $j = 1, \ldots, 2n$
  - Bildung und Speicherung von $P_{S_i(j)}^{\perp}$
- $j = 1, \ldots, 2n$
  - $k = j, \ldots, 2n$
    - $\left(a_{j,k}\right)^i = \left(a_{k,j}\right)^i = \left[P_{S_i(j)}^{\perp} \ , \ P_{S_i(k)}^{\perp}\right]$
  - $\left(b_j\right)^i = \left[P_{S_i(j)}^{\perp} \ , \ v_0\right]$
- Lösung des lin. Gleichungssystems $\left(a_{j,k}\right)_{1\le j,k\le 2n}^{i}\left(c_j\right)_{1\le j\le 2n}^{i} = \left(b_j\right)_{1\le j\le 2n}^{i}$

$$\widetilde{v}_n \oplus p_n = v_0 \ - \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2n} c_j^{(i)} P_{S_i(j)}^{\perp} \ - C_{0,0}P_{0,0} - C_{0,1}P_{0,1} - C_{1,0}P_{1,0} - C_{1,1}P_{1,1}$$

Bestimmung von $C_{0,0}, C_{0,1}, C_{1,0}$ und $C_{1,1}$ zurEinhaltung der Randbedingungen

Ausgaben unter Verwendung von $\widetilde{v}_n \oplus p_n$

Implementation in C++

Der Algorithmus wurde in C++ unter Benutzung des *GNU-C++*-Compilers realisiert. Die Ausgabe erfolgt in einem Format, das z.B. von *GNUPLOT* eingelesen und dargestellt werden kann. Die Verfügbarkeit des Compilers und von *GNUPLOT* ermöglichen den Einsatz des Programms unter verschiedensten Betriebssystemen, unter anderem UNIX und MS-DOS.

Klassendeklarationen

Polynomarithmetik ist ein wesentlicher Bestandteil des Algorithmus. Es bietet sich an, Klassen für Polynome im $\mathbb{R}^1$ und $\mathbb{R}^2$ bereitzustellen. Die Speicherung der Koeffizienten geschieht dabei folgendermaßen:

```
class polynom
{
   protected:
      REAL* pp;
      int gr;

   public: ...
}

class polynom2d
{
   protected:
      polynom *pp;
      int gr;

   public: ...
}
```

Im weiteren werden wir davon ausgehen, daß in den `polynom`-Objekten eines `polynom2d`-Objektes die Potenzen in x konstant sind. In beiden Klassen sind die Koeffizienten mit aufsteigendem Grad des zugehörigen Monoms geordnet.

Es ist nun ein leichtes, die erforderlichen Konstruktoren und Destruktoren zur Verfügung zu stellen. Für arithmetische Operationen mit Polynomen drängt sich das Überladen von Operatoren geradezu auf. Besonderes Augenmerk ist hier auf die Polynommultiplikation zu richten. Es ist das CAUCHYsche Reihenprodukt zu verwenden. Die Evaluierung von Polynomen erfolgt nach dem HORNERschen Schema. Zusätzlich sind Funktionen zur symbolischen Differentiation und Integration implementiert, soweit sie im weiteren erforderlich sind. Die Initialisierung sollte über die `List..`-Funktionen erfolgen, da diese Funktionen selbst die Konstruktoren aufrufen. Es sind zusätzlich Memberfunktionen implementiert, denen nicht das Schlüsselwort `friend` vorgestellt ist. Sie gestatten den unmittelbaren Zugriff auf die `REAL`-Felder,

führen aber keine Indexüberprüfung durch, so daß sie nur im Ausnahmefall benutzt werden sollten.

Bemerkenswert ist die große Ähnlichkeit der Codes `polynom.h` und `polynom2d.h` sowie `polynom.cc` und `polynom2d.cc` zur Implementation beider Klassen, was den enormen Vorteil des Überladens von Operatoren aufzeigt.

Bildung und Speicherung von $P^{\perp}_{S_i(j)}$

Wir deklarieren im Hauptprogramm `trefftz.cc` mit

```
BihaPs = new polynom2d[M*(2*n)];
```

ein eindimensionales Feld, in dem die Basispolynome folgendermaßen abgelegt werden:

$$\texttt{BihaPs[(i-1)*(2*n)+j]} = P^{\perp}_{S_i(j)} \qquad j = 1, \ldots, 2n\ , \quad i = 1, \ldots, \texttt{M}$$

`M` ist ein Parameter über den Symmetrien im Problem berücksichtigt werden können. Das Programm ist allgemein ausgeführt, aber letztlich ist die Gleichung (3.26) mit den Randbedingungen (3.27) zu lösen. Dieses Differentialgleichungsproblem ist symmetrisch in y, und die Unterräume $\Pi_3(G)$ und $\Pi_4(G)$ liefern keinen Anteil zur Lösung. Durch Wahl von `M`=2 wird kein Speicher für die Basispolynome dieser Räume zur Verfügung gestellt, und der Parameter `M` muß im Programm zur Steuerung benutzt werden. In diesem Fall halbiert sich der Rechenaufwand. Bei der Lösung eines Differentialgleichungsproblem das z.B. symmetrisch in x und y ist, könnte `M` sogar auf 1 gesetzt werden.

Als Beispiel werden wir die Erzeugung und Speicherung von $P^{\perp}_{S_1(j)}$ näher betrachten.

Der folgende Funktionsaufruf im Hauptprogramm füllt den ersten Teil des Feldes mit den Polynomen $P^{\perp}_{S_1(j)}$:

```
FunctionsOrthogonalToFirst(biharmPolyEE, &BihaPs[0*(2*n)]);
```

Die Funktion `FunctionsOrthogonalToFirst` ist gemäß (4.16) und (4.17) implementiert:

```
void FunctionsOrthogonalToFirst(polynom2d (*biharmPoly)(int, int),
                                polynom2d *BiharmonicPolynoms)
{
   polynom2d w0 = biharmPoly(0,0);
   REAL C = Integrate2d(w0 * w0,a1,a2,b1,b2);

   for (int i=1; i<=n; i++)
   {
      BiharmonicPolynoms[2*(i-1)] = biharmPoly(i,0) -
         (Integrate2d(biharmPoly(i,0) * w0,a1,a2,b1,b2) / C) * w0;
      BiharmonicPolynoms[2*(i-1)+1] = biharmPoly(i,1) -
         (Integrate2d(biharmPoly(i,1) * w0,a1,a2,b1,b2) / C) * w0;
```

```
      cout << "." << flush;
   }
}
```

Wesentlich ist der Parameter `polynom2d (*biharmPoly)(int, int)`. Zu jedem Unterraum $\Pi_i(G)$ existiert eine Funktion, die die zugehörigen biharmonischen Polynome $P_{r,s}(G)$ erzeugt. Sie muß an dieser Stelle angegeben werden. Es gilt:

$$\texttt{biharmPoly(k, l)}_i = P_{S_i(2k+l)} \qquad k = 1, \ldots, n\ , \quad l = 0, 1\ , \quad i = 1, \ldots, \texttt{M}$$

Wir betrachten die Funktion zur Erzeugung der biharmonischen Polynome aus $\Pi_1(G)$ `biharmPolyEE` aus `biharmps.cc`.

```
polynom2d biharmPolyEE(int n, int which)
{
   polynom2d biharm;
   polynom help;

   if (n == 0)
      biharm = List2d(0, &List(0, 1.0));
   if (n > 0)
   {
      /* P_2n,0 (x,y) */
      if (which == 0)
      {
         biharm.resize(2*n);
         for (int v=0; v<=n-1; v++)
         {
            help.resize(2*v);
            help.set(2*v, Power(-1.0,(REAL)v)*
                     Bin(2*n-1,2*v));
            biharm.set(2*(n-v), help);
         }
      }
      /* P_0,2n (x,y) */
      else
      {
         biharm.resize(2*(n-1));
         for (int v=0; v<=n-1; v++)
         {
            help.resize(2*(n-v));
            help.set(2*(n-v), Power(-1.0,(REAL)v)*
                     Bin(2*n-1,2*v));
            biharm.set(2*v, help);
         }
```

```
      }
   }
   return biharm;
}
```

hierbei ist `Bin` folgendermaßen definiert:

$$\texttt{Bin(a,b)} = \binom{a}{b} \qquad a, b \in \mathbb{N}$$

Bildung einer festen Partikulärlösung v_0 unter Berücksichtigung der eingegebenen Parameter

Wie bereits ausgeführt, ist die Gleichung (3.26) mit den Randbedingungen (3.27) zu lösen. Leicht kann gezeigt werden, daß

$$v_0(x,y) = \left(\frac{1}{192}\frac{dx}{N} + \frac{1}{64}\left[\frac{e}{N} - 2\left(1+\nu\right)\alpha r\right]\right)\left(y^4 + 2x^2y^2 + x^4\right)$$

eine Partikulärlösung von (3.26) ist. Sie wird durch folgenden Code in `trefftz.cc` implementiert:

```
REAL C1 = (e/N-2.0*alpha*(1.0+v)*r) / 64.0;
REAL C2 = (d/N)/ 192.0;
particular = List2d(5, &List(4, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, C1),
                       &List(4, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, C2),
                       &List(2, 0.0, 0.0, 2.0*C1),
                       &List(2, 0.0, 0.0, 2.0*C2),
                       &List(0, C1),
                       &List(0, C2));
```

Gemäß (4.17) wird v_0 bez. $P_{0,0}$ und $P_{1,0}$ orthogonalisiert. Bezüglich $P_{0,1}$ und $P_{1,1}$ ist v_0 bereits orthogonal.

Bildung der linearen Gleichungssysteme und Lösung

In zusätzlichen Feldern `D20BihaPs`, `D11BihaPs` und `D02BihaPs` legen wir die benötigten partiellen Ableitungen aller Elemente von `BihaPs` ab, damit diese nicht bei jeder Bildung von [,] neu berechnet werden müssen. Mit den partiellen Ableitungen der Partikulärlösung verfahren wir ebenso. Es werden dann `M` lineare Gleichungssysteme mit symmetrischen Koeffizientenmatrizen gebildet.

```
MATRIX A[M]; for (i=0; i<M; i++) Resize(A[i],2*n,2*n);
VECTOR b[M]; for (i=0; i<M; i++) Resize(b[i],2*n);
c = new VECTOR[M]; for (i=0; i<M; i++) Resize(c[i],2*n);
```

```
for (int j=0; j<2*n; j++)
{
   for (k=j; k<2*n; k++)
   {
      for (i=0; i<M; i++)
      {
         A[i](j+1,k+1)=
                     Integrate2d(D20BihaPs[i*(2*n)+j] *
                                 D20BihaPs[i*(2*n)+k] +
                             2.0*D11BihaPs[i*(2*n)+j] *
                                 D11BihaPs[i*(2*n)+k] +
                                 D02BihaPs[i*(2*n)+j] *
                                 D02BihaPs[i*(2*n)+k],
                                 a1,a2,b1,b2);
      }
   }
   for (i=0; i<M; i++)
   {
      b[i](j+1) = Integrate2d(D20BihaPs[i*(2*n)+j] *
                              D20particular +
                          2.0*D11BihaPs[i*(2*n)+j] *
                              D11particular +
                              D02BihaPs[i*(2*n)+j] *
                              D02particular,
                              a1,a2,b1,b2);
   }
   cout << "." << flush;
}
for (i=0; i<M; i++)
   MakeSquareMatrixSymetric(A[i]);
```

Die Lösung der Gleichungssysteme erfolgt durch

```
for (i=0; i<M; i++)
   c[i] = SolveLinearSystem(A[i], b[i]);
```

Die Funktion `SolveLinearSystem` soll hier nicht diskutiert werden, da die linearen Gleichungssysteme nicht zu groß werden, und ein einfacher Standardalgorithmus an dieser Stelle eingesetzt werden kann.

Einhaltung der Randbedingungen

Nach der Lösung der linearen Gleichungssysteme gilt

$$\texttt{CalculateSum(x,y,particular,BihaPs,c)} = v_0(x,y) \; - \; \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{2n} c_j^{(i)} P^{\perp}_{S_i(j)}(x,y)$$

Die Randbedingungen werden noch nicht eingehalten, und $C_{0,0}, C_{0,1}, C_{1,0}$ und $C_{1,1}$ müssen bestimmt werden. Die resultierende Funktion aus $[\mathbb{P}_1(G)\ ,\ P_{1,1}]$ wird einfach von der Partikulärlösung abgezogen.

```
REAL P_a1_0 = CalculateSum(a1, 0.0, particular, BihaPs, c);
REAL P_a2_0 = CalculateSum(a2, 0.0, particular, BihaPs, c);
REAL P_0_b1 = CalculateSum(0.0, b1, particular, BihaPs, c);
REAL P_0_b2 = CalculateSum(0.0, b2, particular, BihaPs, c);
REAL P_a2_b2 = CalculateSum(a2, b2, particular, BihaPs, c);
REAL C_10 = (P_a2_0 - P_a1_0) / (a2 - a1);
REAL C_00 = P_0_b2 - b2*C_01;
REAL C_01 = (P_0_b2 - P_0_b1) / (b2 - b1);
REAL C_11 = (P_a2_b2 - a2*C_10 - b2*C_01 - C_00) / (a2 * b2);

particular = particular - List2d(1, &List(1, C_00, C_01),
                                    &List(1, C_10, C_11));
D11particular = D11(particular);
```

Eingabe

Ein- und Ausgabe sind in `overhead.cc` implementiert.

Optional kann der Benutzer den folgenden Informationstext zum Programm ausgeben lassen:

```
The program calculates the lateral deflection of a
rectangular clamped plate using the Trefftz-method.
The coordinate system is placed in the middle of the
plate.
The lateral and the temperature load are assumed to
be independend from y.
The lateral load is restricted to a linear function
p(x,y) = d x + e, D(p)=[-a/2;a/2]*[-b/2;b/2]

The temperature load has to satisfy the stationary
heat conduction equation and the boundary conditions.
The assumed boundary conditions are quadratic
functions in x and the following temperature load
is derived:
                      2
T(x,h/2)  = T (x) = r x +s x+t
             1       1    1   1
                      2
T(x,-h/2) = T (x) = r x +s x+t
             2       2    2   2
```

$$T(x,z)= \frac{1}{2}\left[T_1(x)+T_2(x) \right] + \frac{1}{h}\left[T_1(x)-T_2(x) \right] z + (r_1 + r_2)\left(-\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) + (r_1 - r_2)\left(\frac{h^2}{12} - \frac{z^3}{3h} \right)$$

$$D(T) = [-a/2;a/2]*[-h/2;h/2]$$

The pogram is based on Kirchhoffs theory of small deflection.
The following equation is solved:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 2\frac{d^4 w}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 w}{dy^4} = \frac{p(x,y)}{N} - \frac{1}{N}\left(\frac{d^2 M_t}{dx^2} + \frac{d^2 M_t}{dy^2} \right)$$

With

$$M_t = \frac{E\,\mathrm{Alpha}}{1-v} \int_{-h/2}^{h/2} T(x,y,z)\, z\, dz$$

This leeds to:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 2\frac{d^4 w}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 w}{dy^4} = \frac{dx + e}{N} - 2\,\mathrm{Alpha}\,(1+v)\,\frac{r_1 - r_2}{h}$$

$$w(a/2,y) = w(-a/2,y) = w(x,b/2) = w(x,-b/2) = 0$$

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{(a/2,y)} = \left.\frac{dw}{dx}\right|_{(-a/2,y)} = \left.\frac{dw}{dy}\right|_{(x,b/2)} = \left.\frac{dw}{dy}\right|_{(x,-b/2)} = 0$$

Folgende Eingabefolge ist vom Benutzer abzuarbeiten:

```
Do you want informations about the program (yes=1, no=0) ?
Define the plate !
   Size in x-direction [m] =
   Size in y-direction [m] =
   Thickness           [m] =

Define the material !
                         2
   E-Modul          [N/m ] =
   Lateral contraction v   =
   Plate stiffness   [N/m] = [wird vom Programm berechnet]
   Temp.coeff. alpha [1/K] =

Define triangular load, p(x,y) = d x + e !
         3
   d [N/m ] =
         2
   e [N/m ] =

Define temperature. load,
                        2
T(x,h/2)  = T (x) = r x +s x+t
             1       1    1   1
             2
   r     [K/m ]
    1          =
   s     [K/m]
    1          =
   t     [K]
    1          =
                        2
T(x,-h/2) = T (x) = r x +s x+t
             2       2    2   2
   r     [K/m ]
    2          =
   s     [K/m]
    2          =
   t     [K]
    2          =
Use functions symetric in y (yes=1, no=0) ?

Number of Polynoms = 4*n (5-20) n :

Define how to graph results !
```

```
Graph deflection (yes=1, no=0) ?
Graph bending moment M_x (yes=1, no=0) ?
Graph bending moment M_y (yes=1, no=0) ?
Graph transverse shear force Q_x (yes=1, no=0) ?
Graph transverse shear force Q_y (yes=1, no=0) ?
Graph stress S_x in z=h/2 (yes=1, no=0) ?
Graph stress S_y in z=h/2 (yes=1, no=0) ?
Graph stress T_xy in z=h/2 (yes=1, no=0) ?
Graph stress S_x in z=-h/2 (yes=1, no=0) ?
Graph stress S_y in z=-h/2 (yes=1, no=0) ?
Graph stress T_xy in z=-h/2 (yes=1, no=0) ?
```

Ausgabe

Es ist eine Funktion `GraphResults` implementiert, die basierend auf `CaculateSum` die Reihe $\widetilde{v}_n \oplus p_n$ auf einem gegebenen Gitter in $\overline{G}$ auswertet und die Ergebnisse in einer vorgegebenen Datei derart ablegt, daß sie mit *GNUPLOT* dargestellt werden können. Aber nicht nur die Durchbiegung ist von Interesse. Spannungen, Biegemomente und Querkräfte sind ebenfalls auszugeben. Diese Größen werden durch Differentiation aus der Durchbiegung gewonnen.

Aus (3.18) entnehmen wir die Formel für die Biegemomente.

$$\widetilde{m}_x(x,y) = -N\left\{\widetilde{v}_{,xx}(x,y) + \nu\widetilde{v}_{,yy}(x,y) + (1+\nu)\,\alpha\left(\tau(x) - \frac{h^2}{30}r\right)\right\}$$

Die Abhängigkeit von n wurde in den Bezeichnungen unterdrückt. Die Formel wird in `overhead.cc` durch Bildung einer Hilfsreihe implementiert:

```
polynom2d BM[M*(2*n)],
          BMparticular;
polynom2d Tmoment = List2d(2, &List(0, t - r*pow(h,2.0)/30.0),
                              &List(0, s),
                              &List(0, r));
if (moment_x == 1)
{
   for (j=0; j<2*n; j++)
      for (i=0; i<M; i++)
         BM[i*(2*n)+i]=
            -N * (D20BihaPs[i*(2*n)+j] +
                  v * D02BihaPs[i*(2*n)+j]);
      BMparticular =
         -N * (D20particular +
               v * D02particular +
               alpha*(1.0+v)*Tmoment);
   GraphResults("momentx.pts", moment_x_px, moment_x_py,
```

```
                    BMparticular, BM, c);
    }
```

$\widetilde{m}_y$ analog.

Die Querkräfte werden aus den Biegemomenten abgeleitet. Im vorliegenden Fall gilt

$$\widetilde{q}_x(x,y) = -N\left\{\widetilde{v}_{,xxx}(x,y) + \widetilde{v}_{,yyx}(x,y) + (1+\nu)\,\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau(x) - \frac{h^2}{30}r\right)\right\}$$

$\widetilde{q}_y$ analog.

Aus (3.16) entnehmen wir den Anteil $\sigma_{ij}^{(2)}$ der Gesamtspannung σ_{ij}, der für die Biegung verantwortlich ist. Nur dieser Teil soll berechnet werden. Die Spannungen werden maximal in $z = \pm h/2$.

$$\widetilde{\sigma}_x^{(2)}\left(x,y,z=\pm\frac{h}{2}\right) = \mp\frac{E}{1-\nu^2}\frac{h}{2}\left\{\widetilde{v}_{,xx}(x,y) + \nu\widetilde{v}_{,yy}(x,y) + (1+\nu)\,\alpha\tau(x)\right\}$$

$\widetilde{\sigma}_y^{(2)}$ analog.

$$\widetilde{\tau}_{xy}^{(2)}\left(x,y,z=\pm\frac{h}{2}\right) = \mp\frac{E}{1+\nu}\frac{h}{2}\left(\widetilde{v}_{,xy} \oplus p_{,xy}\right)(x,y)$$

Im Rahmen dieser Arbeit sind die Anteile an der Gesamtspannung, die für die Biegung verantwortlich sind, nur für eine Rechnung angegeben, da aufgrund des linearen Zusammenhangs zwischen diesen Spannungsanteilen und den zugehörigen Biegemomenten unmittelbar auf diese Spannungsanteile geschlossen werden kann. Ein solches Vorgehen bei der Darstellung der Ergebnisse ist allgemein üblich. (z. B. [3.2])

Tabelle 4.1: Programmausführungszeiten auf einem PC mit 486-Intel-CPU, getaktet mit 33 MHz, alle Zeitangaben in Sekunden. Die Linux-Berechnungen wurden ohne X11 ausgeführt, die MS-DOS-Berechnungen ohne Fensteroberfläche und mit 32-Bit-Extender.

	Linux		**MS-DOS**	
`n`	`M`=2	`M`=4	`M`=2	`M`=4
6	5	10	3	7
8	13	27	9	19
10	33	68	23	48

Programmlauf

Wird 16-stellige Genauigkeit zur Berechnung verwandt, sind keine Konvergenzprobleme festzustellen. Ab `n`=8 liefert das Programm bereits Berechnungsergebnisse hoher Genauigkeit. Nennenswerte Abweichungen sind auch bei Vergrößerung von `n` nicht feststellbar. Die Zahl der Unbekannten in den `M` Gleichungssystemen ist

16 für `n`=8. Lineare Gleichungssysteme dieser Größe werden auch mit einfachen Verfahren innerhalb kürzester Zeit gelöst, so daß dieser Programmschritt für die Gesamtausführungszeit nahezu irrelevant ist. Auch die Bildung der biharmonischen Polynome und ihre Orthogonalisierung, sowie die Spiegelungen der oberen Dreiecksmatrizen werden innerhalb kürzester Zeit ausgeführt.

Die Gesamtausführungszeit wird von der Bildung der Skalarprodukte zur Konstruktion der `M` linearen Gleichungssysteme dominiert. Für jedes Gleichungssystem sind $n\,(2n+1)+2n$ Skalarprodukte zu bilden.

Berechnungen

Alle Berechungen im Rahmen dieser Arbeit wurden für `n`=10 durchgeführt.

Kapitel 5

Berechnungen

5.1 Rechnung 1 – Durchbiegung der gesamten Heizwand bei linearer Treibdruckbelastung

Die gesamte Heizwand wird als Vollplatte angenommen. Auf der Seite von $z = h/2$ ist die Heizwand unbeschickt. Die thermische Randbedingung an dieser Stelle entspricht während der gesamten Prozeßdauer ungefähr $T_1(x)$. Auf der Seite von $z = -h/2$ befindet sich Kohle. Nach ca. 3-4 h stellt sich der maximale Treibdruck $p(x)$ ein. Die thermische Randbedingung zu diesem Zeitpunkt wird durch $T_2(x)$ weitgehend wiedergegeben.

Die arithmetischen Mittelwerte von $T_1(x)$ und $T_2(x)$ im Intervall $[-a/2; a/2]$ bezeichnen wir mit $\widetilde{T_1}$ und $\widetilde{T_2}$.

5.1.1 Parameter

Wandabmessungen:

$$a = 7.1\,m \quad b = 16.6\,m \quad h = 0.85\,m$$

Treibdruckbelastung (greift in $z = -h/2$ an, deshalb pos. Vorzeichen !):

$$p(x = -a/2) = 35000\,N/m^2 \quad p(x = 0) = 17500\,N/m^2$$
$$p(x = a/2) = 0\,N/m^2$$

$$d = -4929.58\,N/m^3 \quad e = 17500\,N/m^2$$

Temperaturrandbedingungen (Die Parameterwahl entspricht dem Temperaturfeld 2 aus [2.4]):

$$\text{in } z = h/2:$$
$$T_1(x = -a/2) = 1110\,^oC \quad T_1(x = 2.25) = 1000\,^oC$$
$$T_1(x = a/2) = 850\,^oC \qquad \widetilde{T_1} = 1094.10\,^oC$$

$$r_1 = -13.5801\,^oC/m^2 \quad s_1 = -36.6197\,^oC/m \quad t_1 = 1151.14\,^oC$$

in $z = -h/2$:

$$T_2(x = -a/2) = 980\,^oC \quad T_2(x = 2.25) = 920\,^oC$$
$$T_2(x = a/2) = 850\,^oC \qquad \widetilde{T}_2 = 966.48\,^oC$$

$$r_2 = -6.1269\,^oC/m^2 \quad s_2 = -18.3099\,^oC/m \quad t_2 = 992.21\,^oC$$

Materialkennwerte bei $(\widetilde{T}_1 - \widetilde{T}_2)/2 = 1030.29\,^oC$:

$$\alpha = -1.0 \cdot 10^{-6}\,1/K$$
$$E = 1.34 \cdot 10^{10}\,N/m^2$$

Die Werte sind den Diagrammen in [2.4] entnommen.

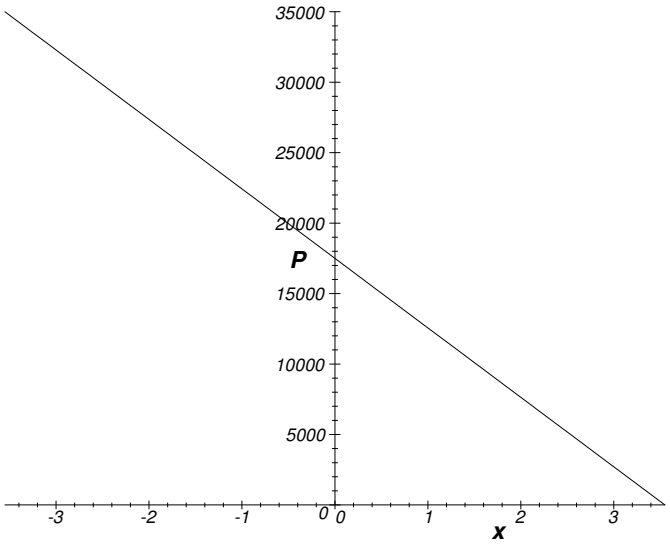
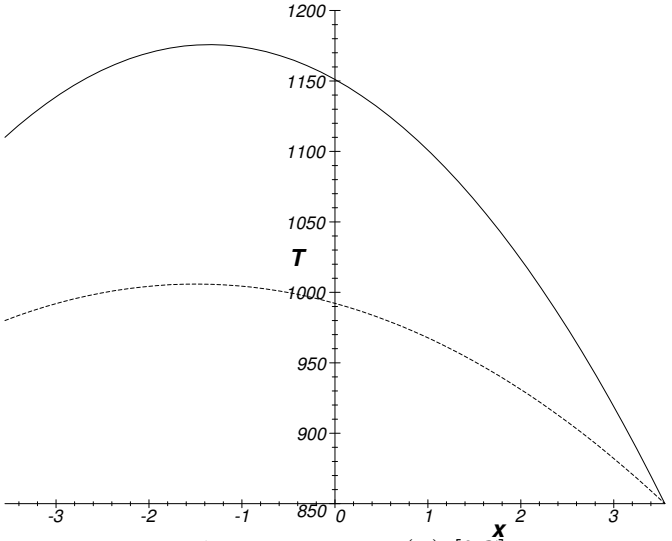


Abbildung 5.1: Rechnung 1 – Treibdruckbelastung $p(x)$ $[N/m^2]$, x $[m]$



obere Kurve: $T_1(x)$ $[^oC]$
untere Kurve: $T_2(x)$ $[^oC]$
x $[m]$

Abbildung 5.2: Rechnung 1 – Thermische Randfunktionen

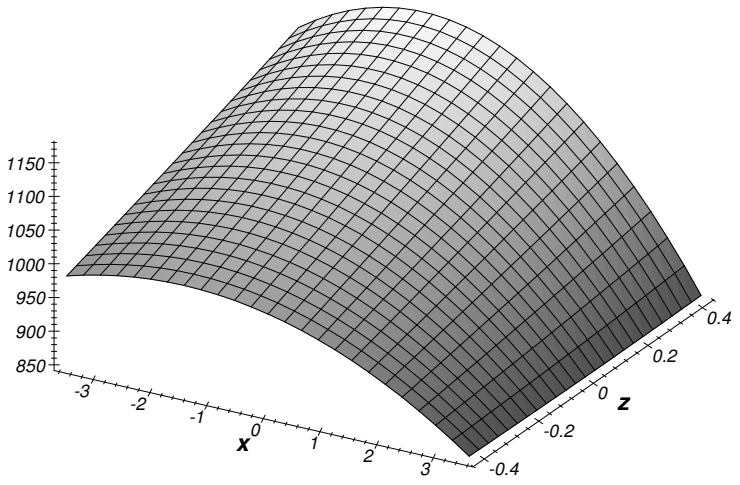


Abbildung 5.3: Rechnung 1 – Thermische Belastung $T(x, z)$ $[^oC]$, x, z $[m]$

5.1.2 Ergebnisse

Die Durchbiegung wird von Treibdruckbelastung und Temperaturrandbedingungen gleichermaßen beeinflußt. Um den Einfluß der thermischen Belastung auf die Gesamtbelastung zu verdeutlichen, ist in den folgenden Grafiken jeweils die sich durch die Gesamtbelastung durch Treibdruck und Temperatur ergebende Funktion als ausgefüllte Fläche, die sich bei Belastung nur durch Temperatur ergebende Funktion als unausgefüllte Fläche dargestellt. Gemäß dem Superpositionsprinzip wird die Differenz durch die Treibdruckbelastung hervorgerufen.

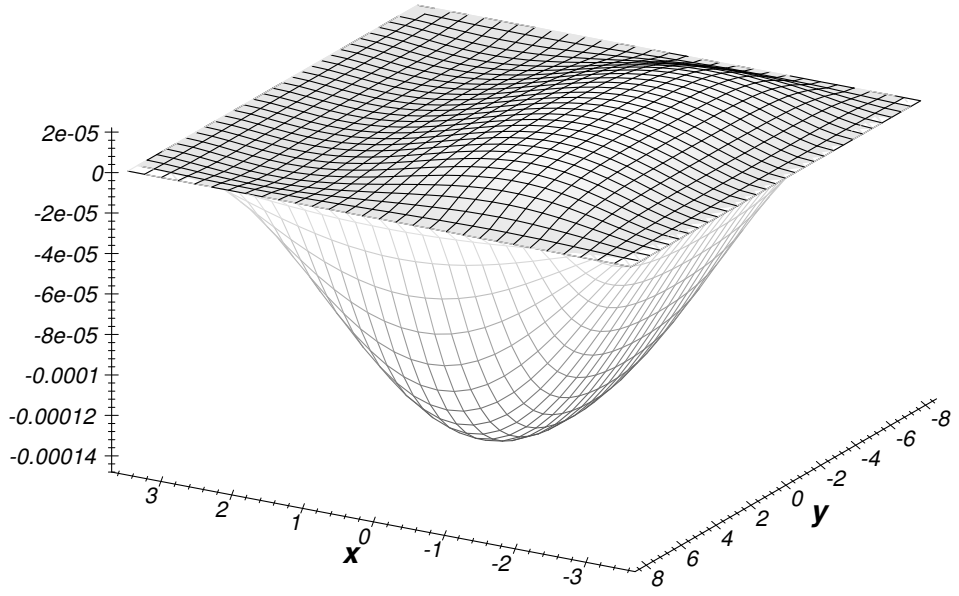
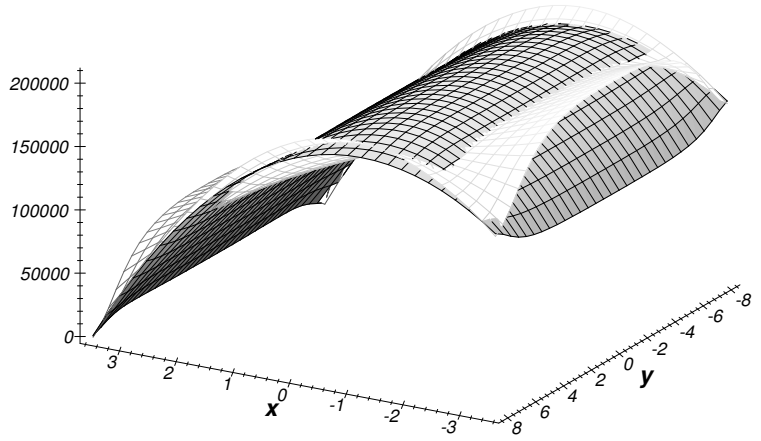
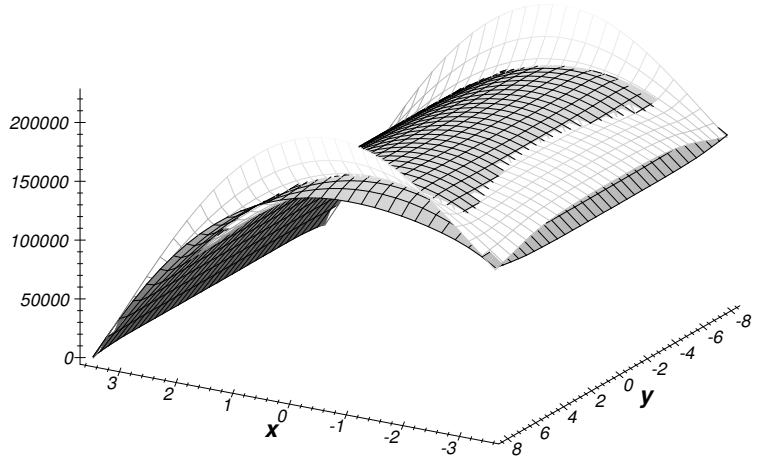


Abbildung 5.4: Rechnung 1 – Durchbiegung $w(x, y)$ $[m]$, x, y $[m]$



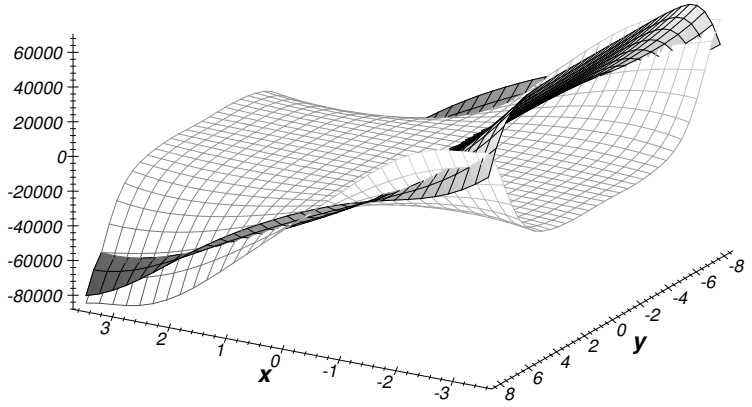
$m_x = m_{11}$ nach (3.18)

Abbildung 5.5: Rechnung 1 – Biegemoment m_x $[N]$, x, y $[m]$



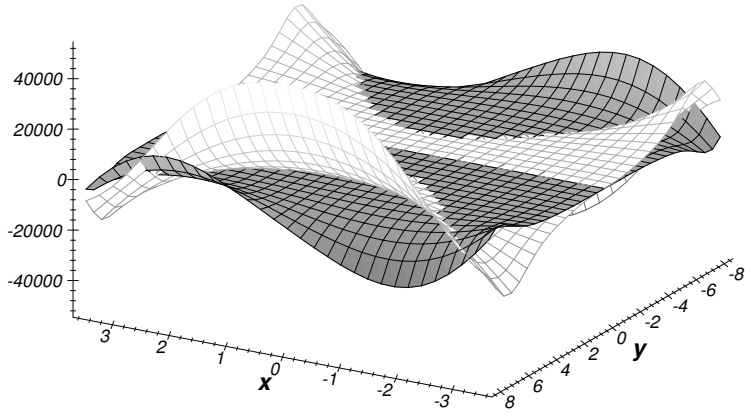
$m_y = m_{22}$ nach (3.18)

Abbildung 5.6: Rechnung 1 – Biegemoment m_y $[N]$, x, y $[m]$



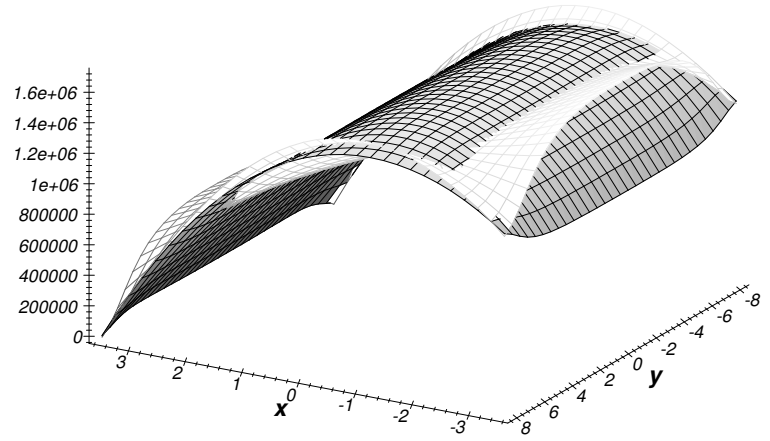
$q_x = q_{11} = m_{11,1} + m_{12,2}$ nach (3.18)

Abbildung 5.7: Rechnung 1 – Querkraft q_x $[N/m]$, x, y $[m]$



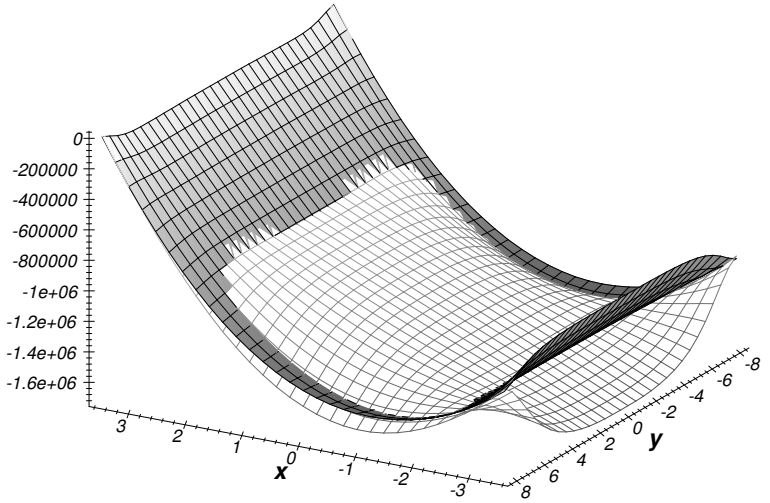
$q_y = q_{22} = m_{22,2} + m_{21,1}$ nach (3.18)

Abbildung 5.8: Rechnung 1 – Querkraft q_y $[N/m]$, x, y $[m]$



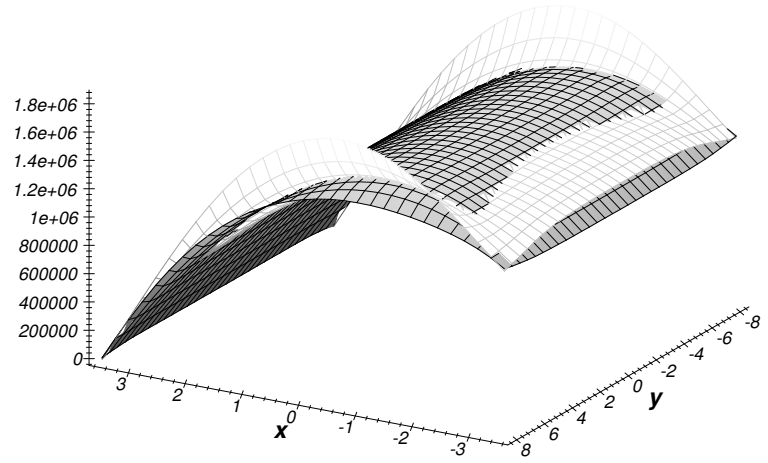
$\sigma_x^{(2)} = \sigma_{11}^{(2)}$ nach (3.16)

Abbildung 5.9: Rechnung 1 – Teilspannung $\sigma_x^{(2)}$ $[N/m^2]$, x, y $[m]$ in $z = h/2$



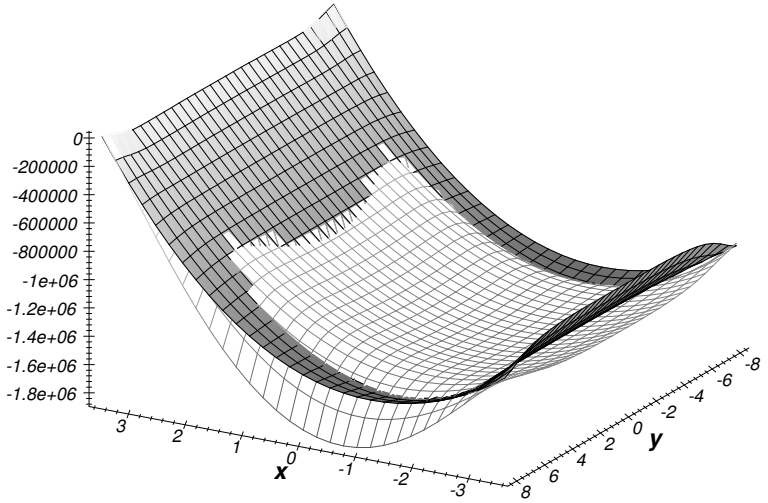
$\sigma_x^{(2)} = \sigma_{11}^{(2)}$ nach (3.16)

Abbildung 5.10: Rechnung 1 – Teilspannung $\sigma_x^{(2)}$ $[N/m^2]$, x, y $[m]$ in $z = -h/2$



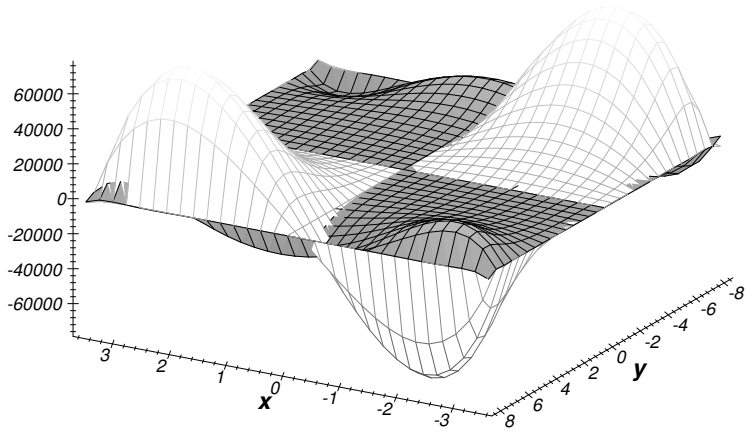
$\sigma_y^{(2)} = \sigma_{22}^{(2)}$ nach (3.16)

Abbildung 5.11: Rechnung 1 – Teilspannung $\sigma_y^{(2)}$ $[N/m^2]$, x, y $[m]$ in $z = h/2$



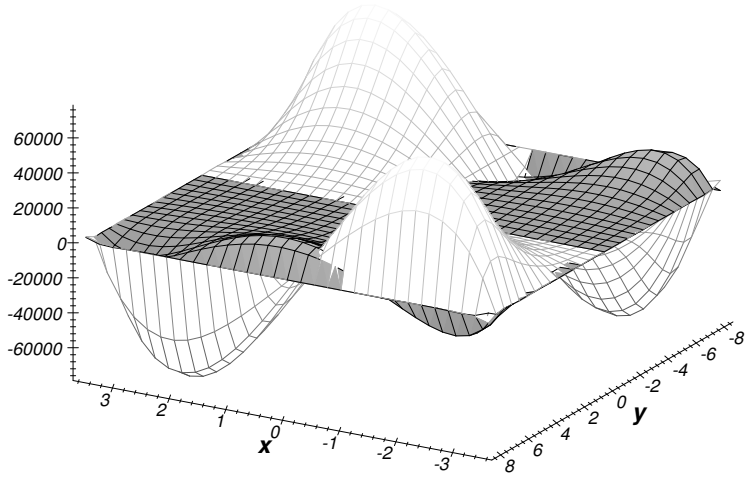
$\sigma_y^{(2)} = \sigma_{22}^{(2)}$ nach (3.16)

Abbildung 5.12: Rechnung 1 – Teilspannung $\sigma_y^{(2)}$ $[N/m^2]$, x, y $[m]$ in $z = -h/2$



$\tau_{xy}^{(2)} = \sigma_{12}^{(2)}$ nach (3.16)

Abbildung 5.13: Rechnung 1 – Teilspannung $\tau_{xy}^{(2)}$ $[N/m^2]$, x, y $[m]$ in $z = h/2$



$\tau_{xy}^{(2)} = \sigma_{12}^{(2)}$ nach (3.16)

Abbildung 5.14: Rechnung 1 – Teilspannung $\tau_{xy}^{(2)}$ $[N/m^2]$, x, y $[m]$ in $z = -h/2$

5.2 Rechnung 2 – Durchbiegung der gesamten Heizwand bei konstantem Treibdruck

Die Rechnung 2 stimmt mit Rechnung 1 bis auf die Treibdruckbelastung überein.

5.2.1 Parameter

Alle Parameter wie Rechnung 1 bis auf:

Konstante Treibdruckbelastung:

$$p(x = -a/2) = 17500\,N/m^2 \quad p(x = 0) = 17500\,N/m^2$$
$$p(x = a/2) = 17500\,N/m^2$$

$$d = 0\,N/m^3 \quad e = 17500\,N/m^2$$

5.2.2 Ergebnisse

Es ist anzumerken, daß Symmetrien in x–Richtung trotz symmetrischer Treibdruckbelastung nur näherungsweise vorliegen können, da die Belastung durch Temperatur unsymmetrisch in x–Richtung ist.

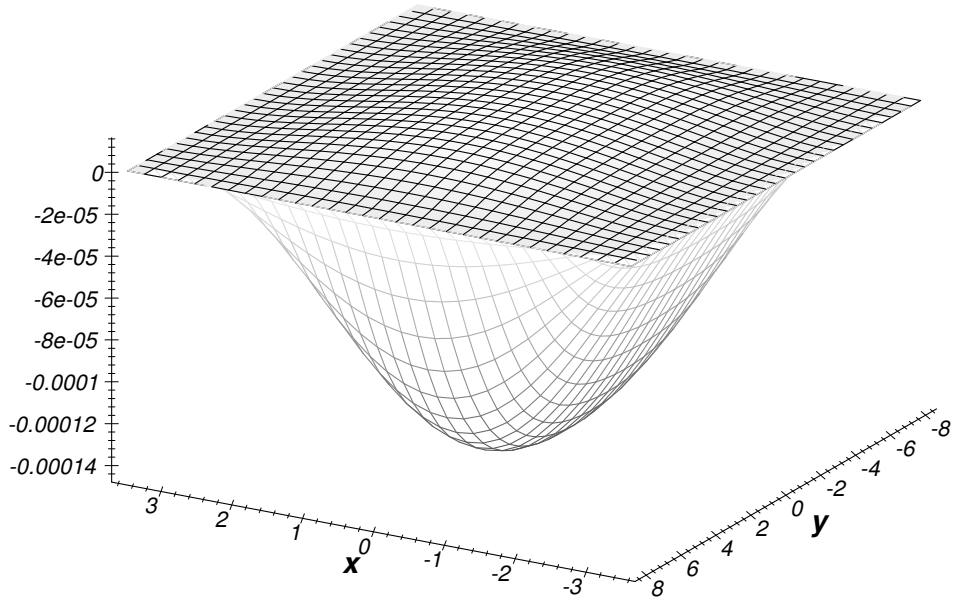


Abbildung 5.15: Rechnung 2 – Durchbiegung $w(x, y)$ $[m]$, x, y $[m]$

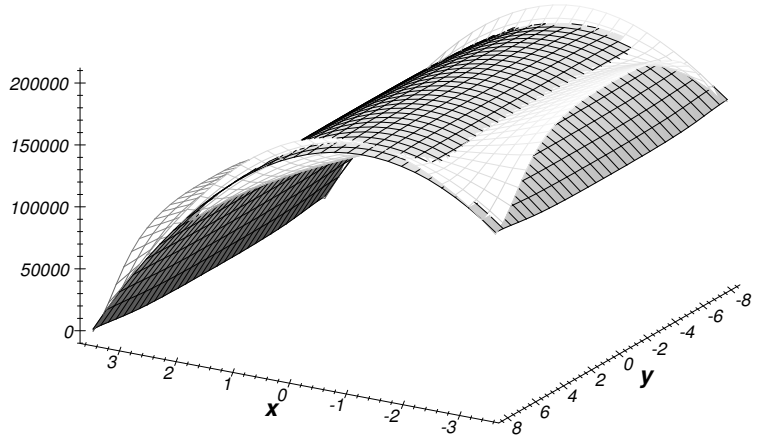


Abbildung 5.16: Rechnung 2 – Biegemoment m_x $[N]$, x, y $[m]$

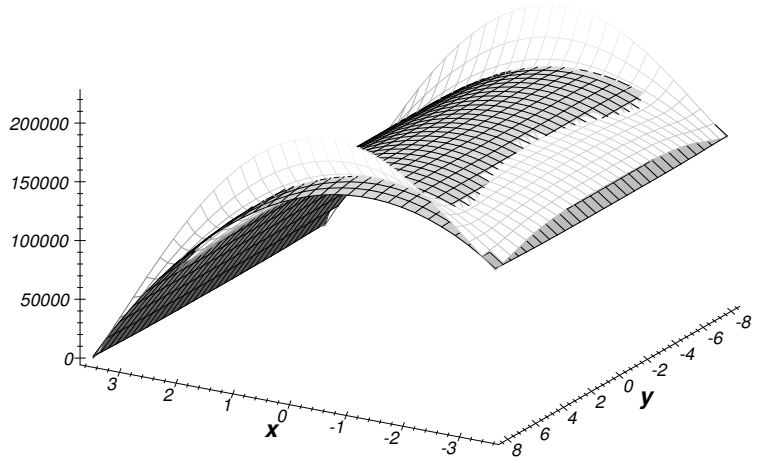


Abbildung 5.17: Rechnung 2 – Biegemoment m_y $[N]$, x, y $[m]$

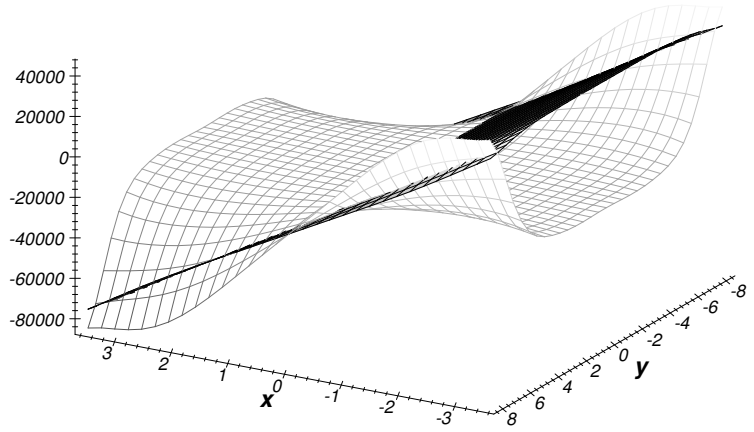


Abbildung 5.18: Rechnung 2 – Querkraft q_x $[N/m]$, x, y $[m]$

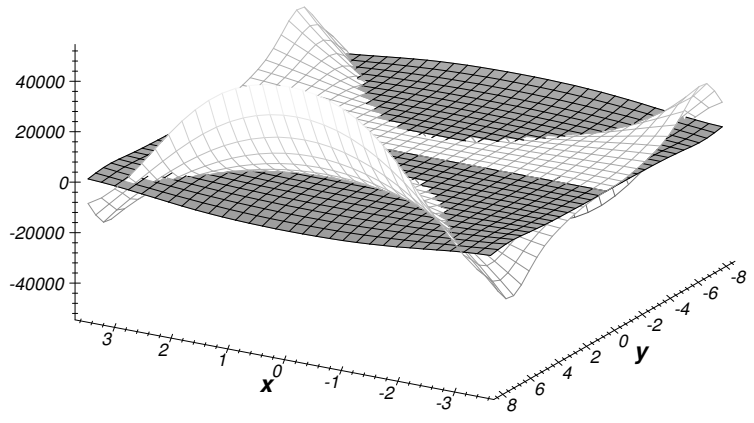


Abbildung 5.19: Rechnung 2 – Querkraft q_y $[N/m]$, x, y $[m]$

5.3 Rechnung 3 – Gesamtdurchbiegung beider Läuferwände

Die Dicke der Wand wird auf die Gesamtdicke der Läuferwände reduziert, die Binder werden vernachlässigt.

Alle weiteren Parameter werden wie in Rechnung 1 gewählt.

5.3.1 Parameter

Wandabmessungen:

$$a = 7.1\,m \quad b = 16.6\,m \quad h = 0.19\,m$$

Die Funktion $T(x, z)$ der thermischen Belastung ändert sich gegenüber Rechnung 1, da h in T eingeht.

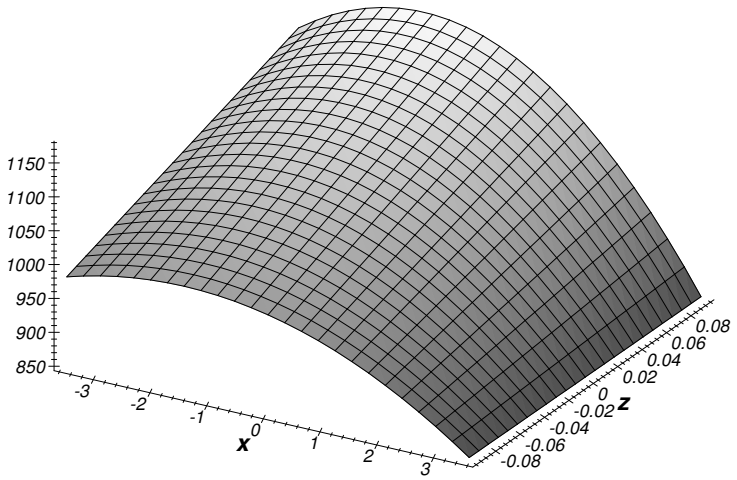


Abbildung 5.20: Rechnung 3 – Thermische Belastung $T(x, z)$ $[^oC]$, x, z $[m]$

5.3.2 Ergebnisse

Der Einfluß der Temperaturrandbedingungen auf die Lösung wird deutlich geringer. Trotzdem sind wie in den bisherigen Abbildungen die Gesamtbelastung durch Treibdruck und Temperatur und die Belastung nur durch Temperatur in einer Grafik aufgetragen.

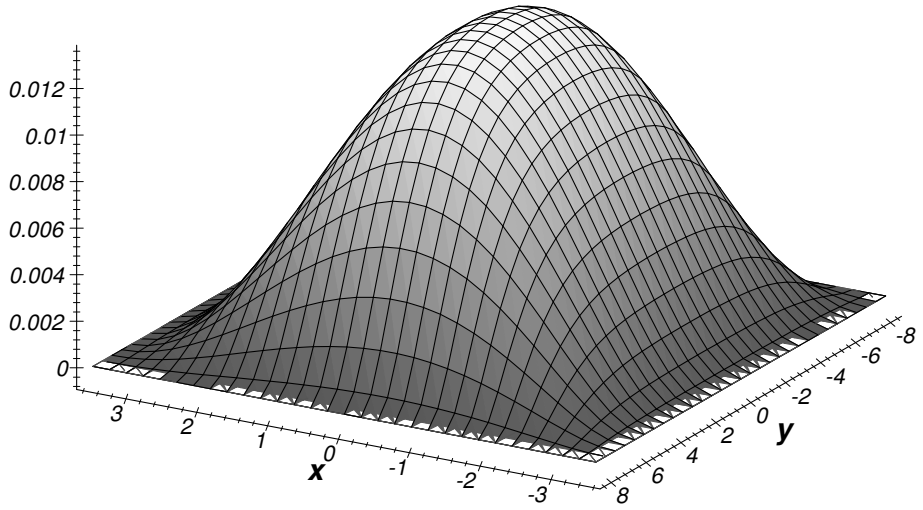


Abbildung 5.21: Rechnung 3 – Durchbiegung $w(x, y)$ $[m]$, x, y $[m]$

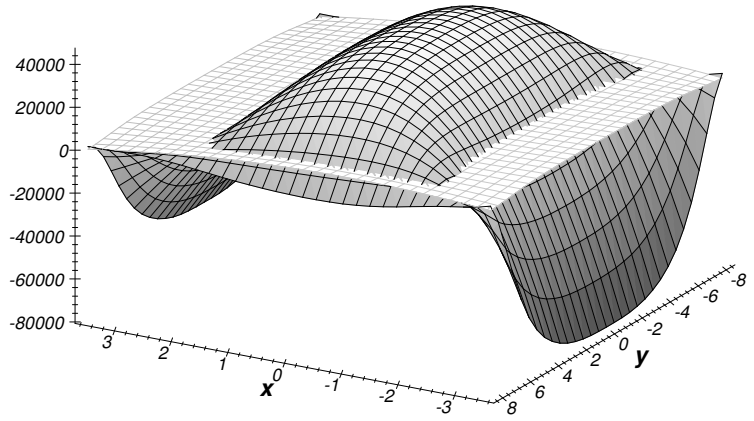


Abbildung 5.22: Rechnung 3 – Biegemoment m_x $[N]$, x, y $[m]$

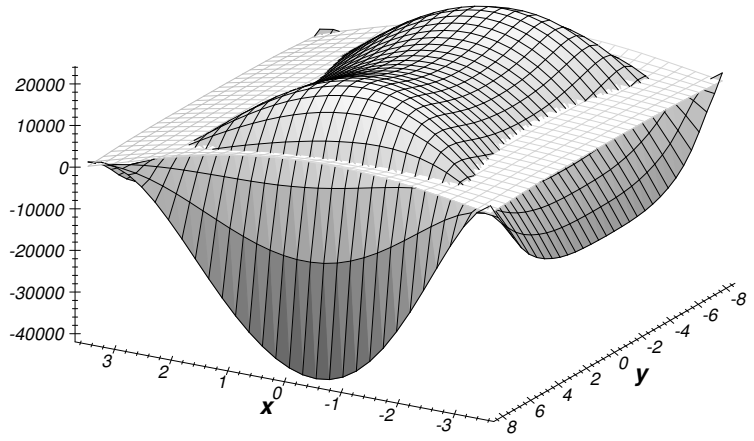


Abbildung 5.23: Rechnung 3 – Biegemoment m_y $[N]$, x, y $[m]$

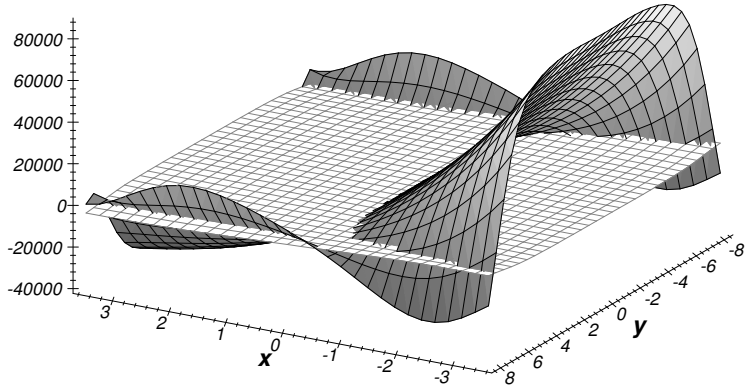


Abbildung 5.24: Rechnung 3 – Querkraft q_x $[N/m]$, x, y $[m]$

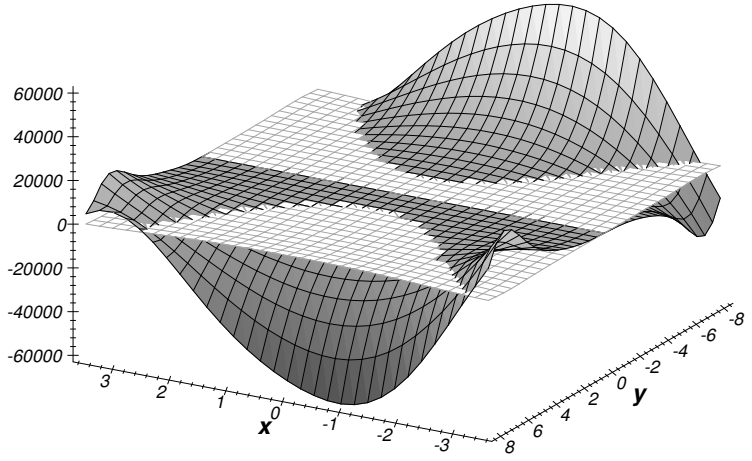


Abbildung 5.25: Rechnung 3 – Querkraft q_y $[N/m]$, x, y $[m]$

5.4 Rechnung 4 – Durchbiegung der Läuferwand mit maximalen Temperaturdifferenzen

Es wird die Läuferwand mit den größten Temperaturdifferenzen betrachtet. Dies ist die Läuferwand, die auf der Seite von $z = h/2$ unbeschickt ist . Die thermische Randbedingung an dieser Stelle entspricht während der gesamten Prozeßdauer ungefähr $T_1(x)$, wobei $T_1(x)$ nun die Temperatur innerhalb eines Heizzuges ist. Auf der Seite von $z = -h/2$ ändert sich gegenüber Rechnung 1 nichts. $T_2(x)$ und $p(x)$ werden wie dort gewählt.

5.4.1 Parameter

Wandabmessungen:

$$a = 7.1\,m \quad b = 16.6\,m \quad h = 0.095\,m$$

Treibdruckbelastung wie in Rechnung 1.

Temperaturrandbedingungen (Parameterwahl wie Temperaturfeld 2 aus [2.4]):

$$\begin{aligned} &\text{in } z = h/2\text{:} \\ T_1(x = -a/2) &= 1320\,^oC \quad T_1(x = 2.25) = 1170\,^oC \\ T_1(x = a/2) &= 1000\,^oC \qquad\qquad \widetilde{T_1} = 1284.14\,^oC \end{aligned}$$

$$r_1 = -14.7757\,^oC/m^2 \quad s_1 = -45.0704\,^oC/m \quad t_1 = 1346.21\,^oC$$

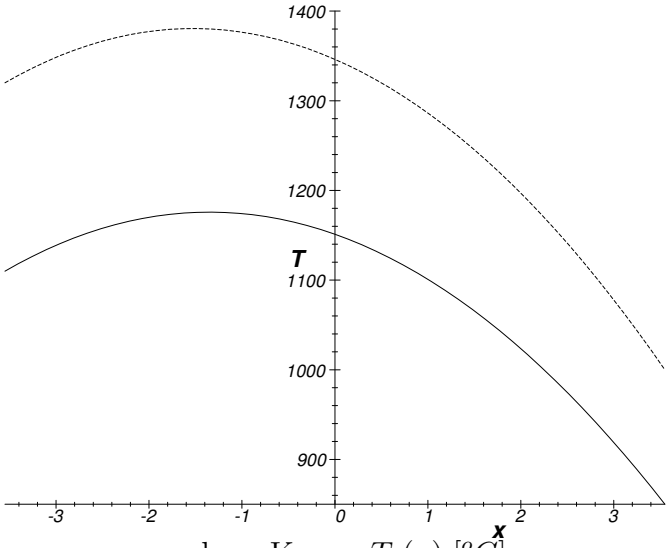
$$\begin{aligned} &\text{in } z = -h/2\text{:} \\ T_2(x = -a/2) &= 980\,^oC \quad T_2(x = 2.25) = 920\,^oC \\ T_2(x = a/2) &= 850\,^oC \qquad\qquad \widetilde{T_2} = 966.48\,^oC \end{aligned}$$

$$r_2 = -6.1269\,^oC/m^2 \quad s_2 = -18.3099\,^oC/m \quad t_2 = 992.21\,^oC$$

Materialkennwerte bei $(\widetilde{T_1} - \widetilde{T_2})/2 = 1125.31\,^oC$:

$$\begin{aligned} \alpha &= -0.8 \cdot 10^{-6}\,1/K \\ E &= 1.42 \cdot 10^{10}\,N/m^2 \end{aligned}$$

Werte aus [2.4].



obere Kurve: $T_1(x)$ $[^oC]$
untere Kurve: $T_2(x)$ $[^oC]$
x $[m]$

Abbildung 5.26: Rechnung 4 – Thermische Randfunktionen

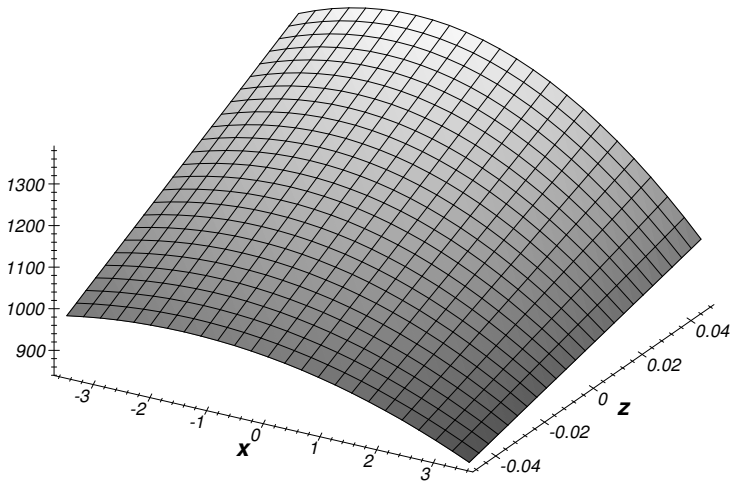


Abbildung 5.27: Rechnung 4 – Thermische Belastung $T(x, z)$ $[^oC]$, x, z $[m]$

5.4.2 Ergebnisse

Die Funktionen, die bei reiner Belastung durch Temperatur entstehen, verschwinden fast vollständig gegenüber den Funktionen, die aus der Gesamtbelastung durch Temperatur und Treibdruck resultieren.

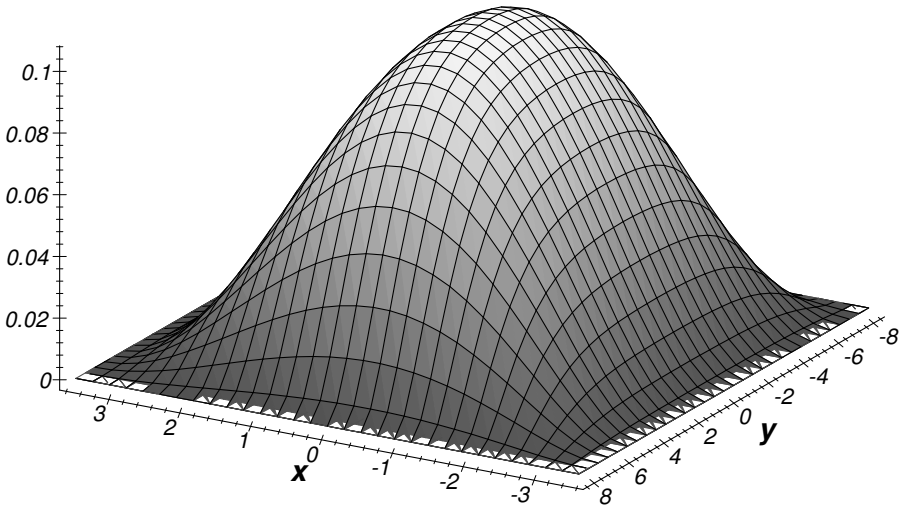


Abbildung 5.28: Rechnung 4 – Durchbiegung $w(x, y)$ $[m]$, x, y $[m]$

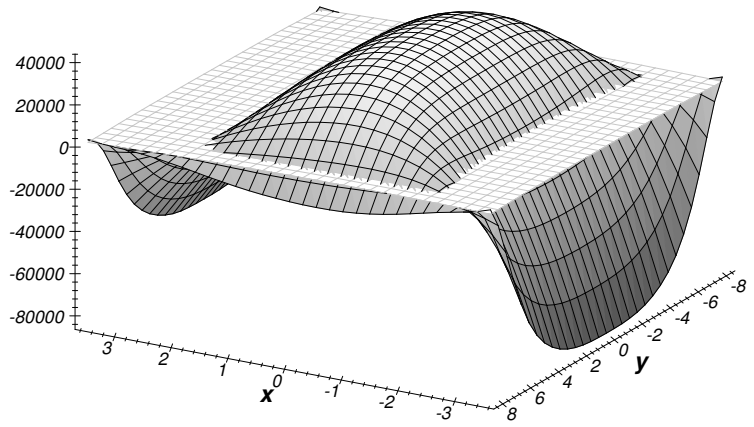


Abbildung 5.29: Rechnung 4 – Biegemoment m_x $[N]$, x, y $[m]$

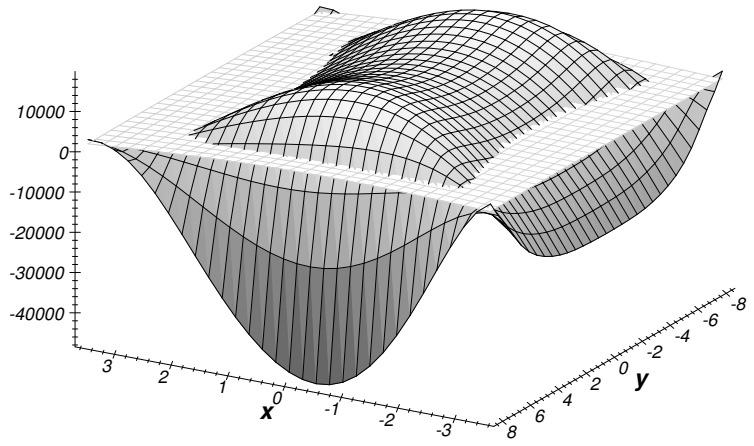


Abbildung 5.30: Rechnung 4 – Biegemoment m_y $[N]$, x, y $[m]$

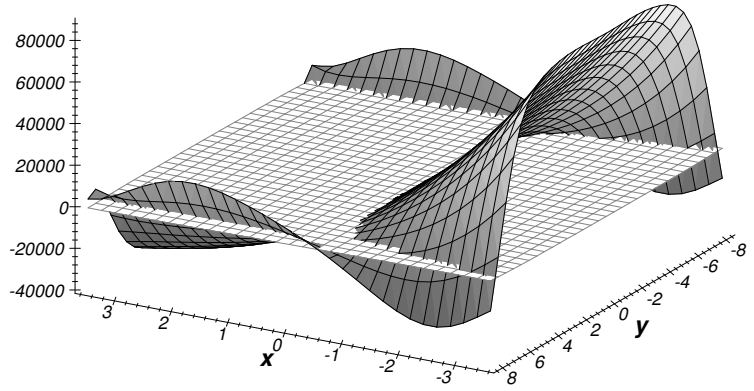


Abbildung 5.31: Rechnung 4 – Querkraft q_x $[N/m]$, x, y $[m]$

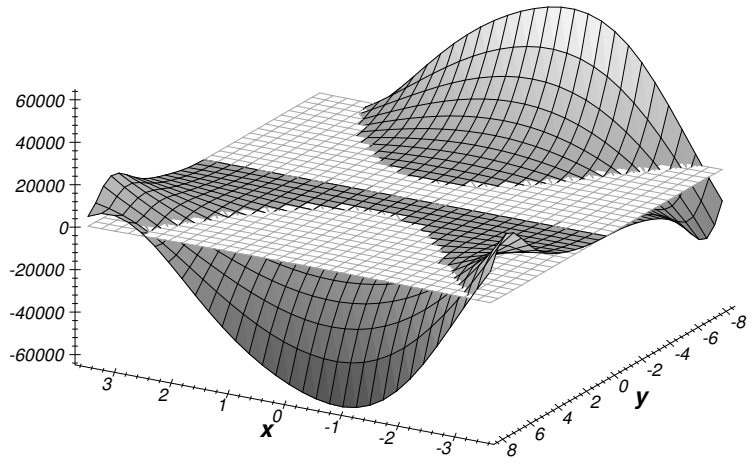


Abbildung 5.32: Rechnung 4 – Querkraft q_y $[N/m]$, x, y $[m]$

5.5 Auswertung von Rechnung 1 bis 4

Die Belastung durch Temperatur wirkt aufgrund des negativen Wärmeausdehnungskoeffinzienten α der Treibdruckbelastung entgegen. Nicht nur die Durchbiegung wird abgeschwächt, auch die maximal auftretenden Biegemomente, Querkräfte und Spannungen werden reduziert.

In den Rechnungen 1 und 2 kompensieren sich die durch Temperatur- und Treibdruckbelastung hervorgerufenen Durchbiegungen fast vollständig. In den Rechnungen 3 und 4 wird die Durchbiegung von der Treibdruckbelastung bestimmt, die Belastung durch Temperatur ist nahezu irrelevant. Allen Rechnungen ist gemein, daß die Durchbiegung in positiver Richtung erfolgt. Der Ort der maximalen Durchbiegung ist erwartungsgemäß in $y = 0$ zu finden. Für dreiecksförmige Treibdruckbelastung ist die Durchbiegung größer als für konstanten Treibdruck. Im Fall eines konstanten Treibdrucks ist das Maximum der Durchbiegung bei $(0, 0)$, bei dreiecksförmiger Treibdruckbelastung verschiebt es sich auf der x-Achse in negativer Richtung.

Der Einfluß der Temperatur zeigt sich auch beim Ort der maximalen Biegemomente. In den Rechnungen 1 und 2 ist er auf der negativen x-Achse zu finden, in den Rechnungen 3 und 4 finden wir ihn für m_x bei $(-a/2, 0)$, für m_y bei $(0, \pm b/2)$. Auf den Ort der maximalen Querkräfte hat die Temperaturbelastung bei den von uns gewählten Parametersätzen keinen Einfluß. Er liegt für q_x bei $(-a/2, 0)$, für q_y bei $(0, \pm b/2)$.

Wie bereits angedeutet, ist die Kenntnis der für die Biegung verantwortlichen Teilspannungen nur von untergeordneter Bedeutung. Orte maximaler Spannung können aufgrund des linearen Zusammenhangs zwischen Spannungen und Biegemomenten auch aus den Darstellungen der Biegemomente entnommen werden. Auf die Darstellung von $m_{xy} = m_{yx}$ wurde in dieser Arbeit verzichtet, da das von den Schubspannungen $\tau_{xy}^{(2)} = \tau_{yx}^{(2)}$ induzierte Moment für die Dimensionierung einer Heizwand irrelevant ist.

[2.4] gibt ca. $3\,mm$ als maximale Durchbiegung einer Heizwand mit dem Parametersatz aus Rechnung 1 an. Ein solcher Wert wird sich für $0.19 < h < 0.85$ einstellen. Ziel soll es nun sein, für den Parametersatz aus Rechnung 1 ein h so zu bestimmen, daß sich eine maximale Durchbiegung von ca. $3\,mm$ einstellt.

5.6 Rechnung 5 – Betrag und Ort der maximalen Durchbiegung

Die maximale Durchbiegung von $w(x, y)$ stellt sich in jedem Fall auf der x-Achse ein. Soll sie ermittelt werden, besteht das Problem darin, die betragsmäßig größte Extremstelle der nur von x abhängigen Funktion $w(x, 0)$ zu bestimmen. Dieses Problem lösen wir mit dem Newton-Verfahren. Interessant ist aber nicht nur die betraglich größte Durchbiegung, sondern auch ihr Ort auf der x-Achse. Betraglich größte Durchbiegung und ihr Ort werden im weiteren in Abhängigkeit von h und r aufgetragen. s und t sind für die Durchbiegung unerheblich.

Auf die Implementierung des Newton-Verfahrens und die Abänderung des Programms, um von h und r abhängige Darstellungen zu erhalten, werden wir an dieser Stelle nicht eingehen.

Wir werden des weiteren die Frage diskutieren, ob die Berandung einen Einfluß auf die betraglich größte Durchbiegung und ihren Ort auf der x-Achse hat. Hierzu vergleichen wir die Ergebnisse, die die Plattentheorie liefert, mit den Ergebnissen für den Plattenstreifen. Vernachlässigen wir die Berandung und nehmen die Durchbiegung unabhängig von y an, erhalten wir aus

$$\frac{d^4 w^*(x)}{dx^4} = \frac{dx + e}{N} - 2\,(1+\nu)\,\alpha r$$

$$w^*\left(\pm\frac{a}{2}\right) = \left.\frac{dw^*}{dx}\right|_{\left(\pm\frac{a}{2}\right)} = 0$$

$$\begin{aligned} w^*(x) = {} & \frac{(1-\nu^2)\,d}{10Eh^3}x^5 + \left(\frac{(1-\nu^2)\,e}{2Eh^3} - \frac{(1+\nu)\,\alpha r}{12}\right)x^4 - \frac{(1-\nu^2)\,d}{20Eh^3}x^3 \\ & + \left(-\frac{(1-\nu^2)\,e}{4Eh^3} + \frac{(1+\nu)\,\alpha r}{24}\right)a^2x^2 + \frac{(1-\nu^2)\,d}{160Eh^3}a^4x \\ & + \left(\frac{(1-\nu^2)\,e}{32Eh^3} - \frac{(1+\nu)\,\alpha r}{192}\right)a^4 \end{aligned}$$

5.6.1 Parameter - Rechnung 5.1

Wandabmessungen:

$$a = 7.1\,m \quad b = 16.6\,m \quad h = 0.19\,m \;-\; 0.85\,m$$

Treibdruckbelastung:

$$d = -4929.58\,N/m^3 \quad e = 17500\,N/m^2$$

Temperaturrandbedingungen:

$$r = \frac{1}{h}\,(r_1 - r_2) = -100^oC/m^3 \;-\; 0^oC/m^3$$

Materialkennwerte:

$$\alpha = -1.0 \cdot 10^{-6}\, 1/K$$
$$E = 1.34 \cdot 10^{10}\, N/m^2$$

5.6.2 Ergebnisse

Die betraglich größte Durchbiegung $w_{max}(h, r)$ bzw. $w^*_{max}(h, r)$ ist eine stetige Funktion. Die Funktion der x-Koordinate des Ortes der betraglich größten Durchbiegung w_{max} bzw. w^*_{max} in Anhängigkeit von h und r ist unstetig. Der Plattenstreifen ist Teil der komplexeren Plattentheorie, und es ist deshalb möglich das Verhalten der Funktion $w(x, 0)$ mit Hilfe von $w^*(x)$ zu erklären:

$w^*(x)$ ist ein Polynom fünften Grades. Es kann folglich maximal vier Orte mit waagerechter Tangente geben. An jedem Rand ist ein solcher Ort zu finden. Im Innern des offenen Intervalls $(-a/2; a/2)$ können nur noch maximal zwei Orte mit waagerechter Tangente liegen.

Die Streckenlast der Biegelinie $w^*(x)$ zerfällt in die dreiecksförmige Streckenlast des Treibdrucks und die konstante Streckenlast der Temperatur mit negativem Vorzeichen. Drei Fälle können nun eintreten:

1. Der konstante Anteil dominiert die Biegelinie. Es gibt nur eine Extremstelle in $(-a/2; a/2)$. Die Extremstelle ist ein Minimum, das auf der positiven x-Achse zu finden ist. Die Temperaturbelastung ist entscheidend und die Durchbiegung ist negativ.

2. Der dreieckige Anteil dominiert die Biegelinie. Es gibt nur eine Extremstelle in $(-a/2; a/2)$. Die Extremstelle ist ein Maximum, das auf der negativen x-Achse zu finden ist. Die Treibdruckbelastung ist entscheidend und die Durchbiegung ist positiv.

3. Beide Anteile heben sich fast auf. Es gibt ein lokales Minimum in $(-a/2; 0)$ und ein lokales Maximum in $(0; a/2)$.

Die Unstetigkeit der Funktion des Ortes erklärt sich nun durch die betragliche Annäherung der Funktionswerte von Minimum und Maximum. Im Grenzfall sind die Beträge der Funktionswerte beider Extremstellen gleich, und der Ort der betragsmäßig größten Extremstelle wechselt schlagartig.

Wie in den Rechnung 1 bis 4 ist auch in den Darstellungen von $w_{max}(h, r)$ und $w^*_{max}(h, r)$ die Funktion unter Belastung durch Treibdruck und Temperatur als ausgefüllte Fläche, die Funktion unter reiner Temperaturbelastung als unausgefüllte Fläche aufgetragen.

Für die Funktion der x-Koordinate des Ortes der betraglich größten Durchbiegung w_{max} bzw. w^*_{max} ist ein solches Vorgehen nicht erforderlich, da bei reiner Temperaturbelastung die x-Koordinate des Ortes der maximalen Durchbiegung gleich Null ist.

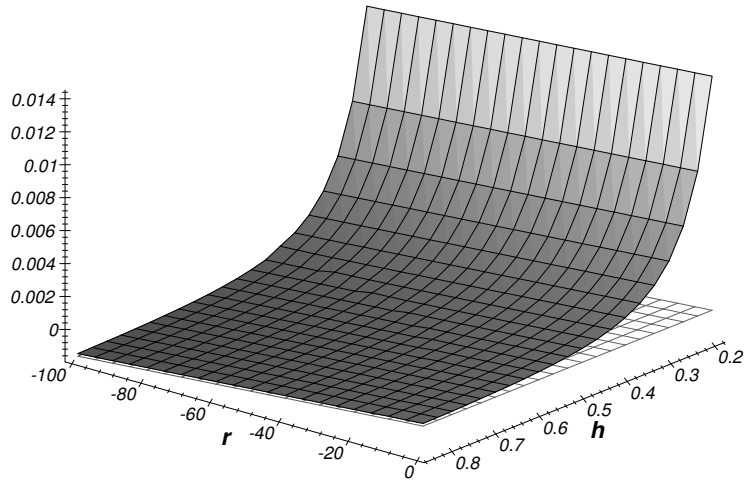


Abbildung 5.33: Rechnung 5.1 – maximale Durchbiegung w_{max} $[m]$, h $[m]$, r $[^oC/m^3]$

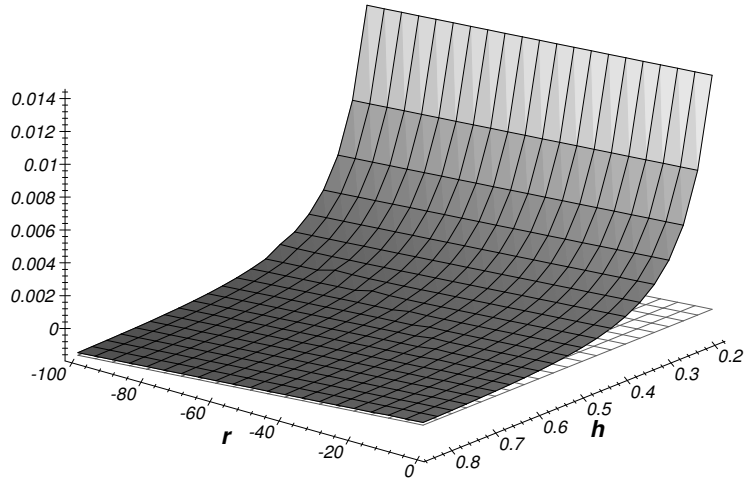


Abbildung 5.34: Rechnung 5.1 – maximale Durchbiegung w^*_{max} $[m]$, h $[m]$, r $[^oC/m^3]$

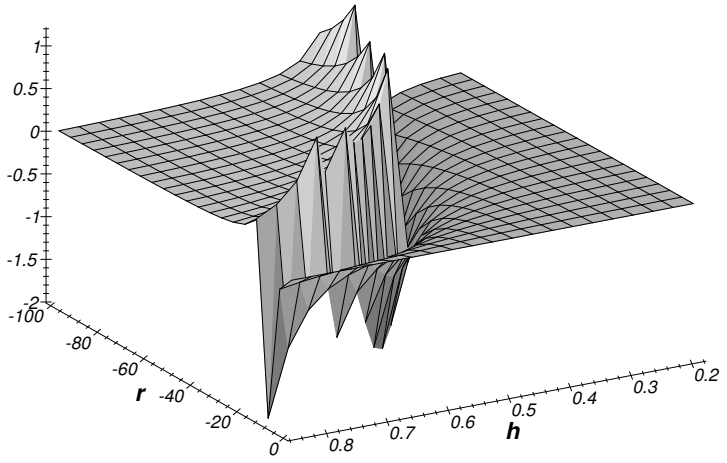


Abbildung 5.35: Rechnung 5.1 – x-Koordinate der max. Durchbiegung w_{max} $[m]$, h $[m]$, r $[^oC/m^3]$

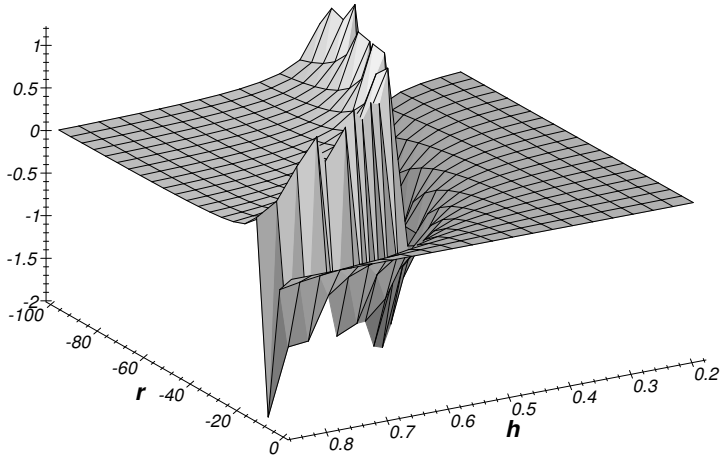


Abbildung 5.36: Rechnung 5.1 – x-Koordinate der max. Durchbiegung w^*_{max} $[m]$, h $[m]$, r $[^oC/m^3]$

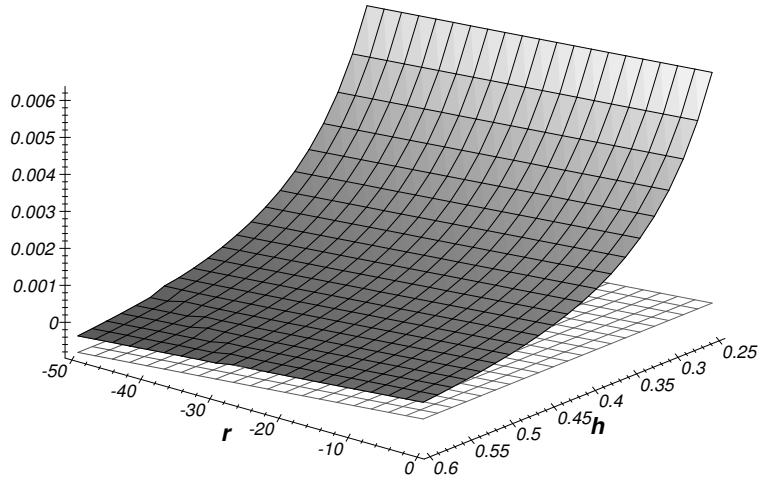


Abbildung 5.37: Rechnung 5.1 – maximale Durchbiegung w_{max} $[m]$, h $[m]$, r $[^oC/m^3]$, (Auschnitt)

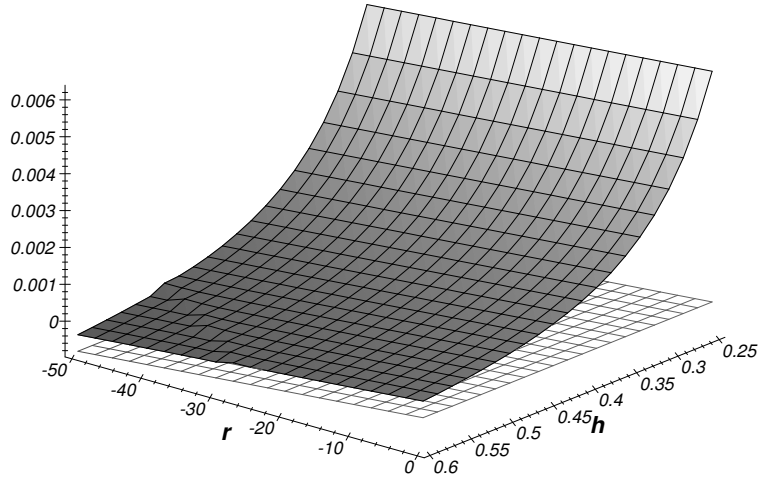


Abbildung 5.38: Rechnung 5.1 - maximale Durchbiegung w^*_{max} $[m]$, h $[m]$, r $[^oC/m^3]$ (Ausschnitt)

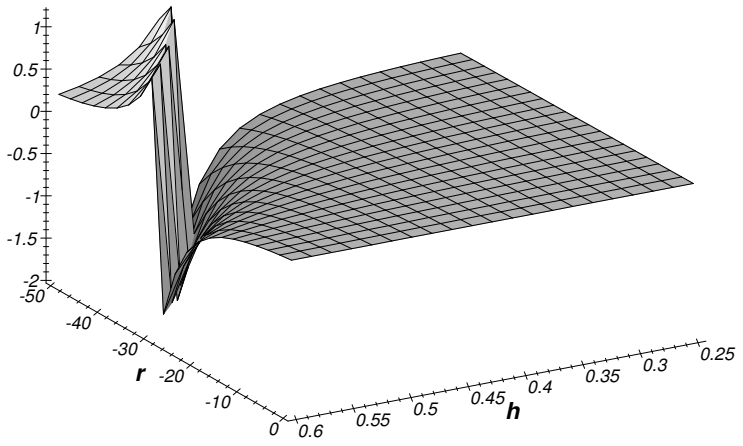


Abbildung 5.39: Rechnung 5.1 – x-Koordinate der max. Durchbiegung w_{max} $[m]$, h $[m]$, r $[^oC/m^3]$ (Ausschnitt)

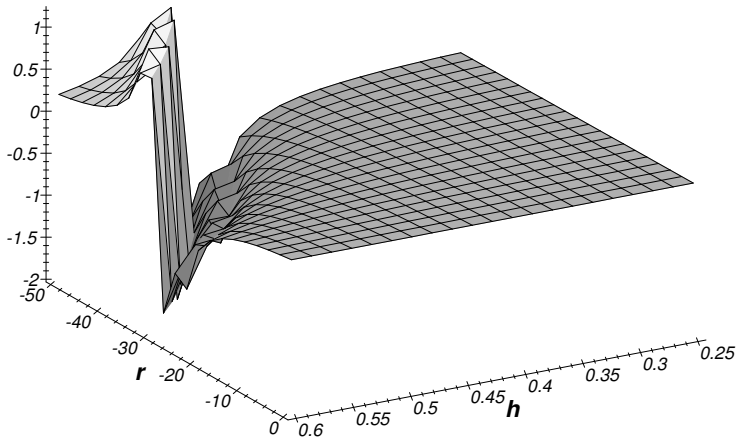


Abbildung 5.40: Rechnung 5.1 – x-Koordinate der max. Durchbiegung w^*_{max} $[m]$, h $[m]$, r $[^oC/m^3]$ (Ausschnitt)

5.6.3 Parameter - Rechnung 5.2

Alle Parameter wie Rechnung 5.1 bis auf Materialkennwerte:

$$\alpha = -0.8 \cdot 10^{-6}\, 1/K$$
$$E = 1.42 \cdot 10^{10}\, N/m^2$$

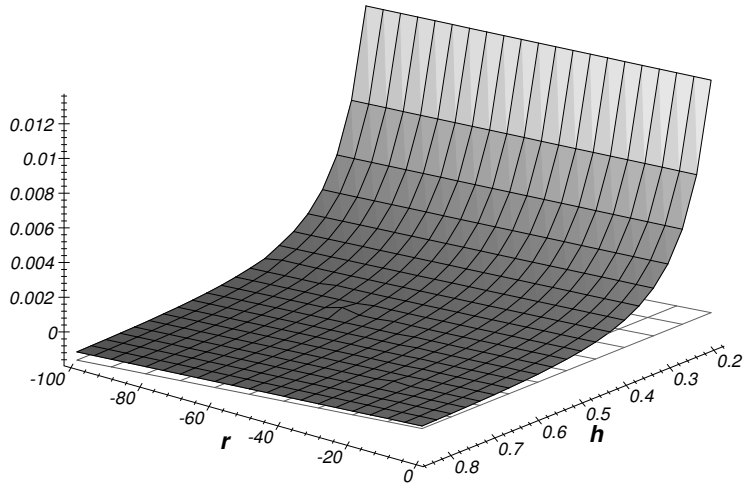


Abbildung 5.41: Rechnung 5.2 – maximale Durchbiegung w_{max} $[m]$, h $[m]$, r $[^oC/m^3]$

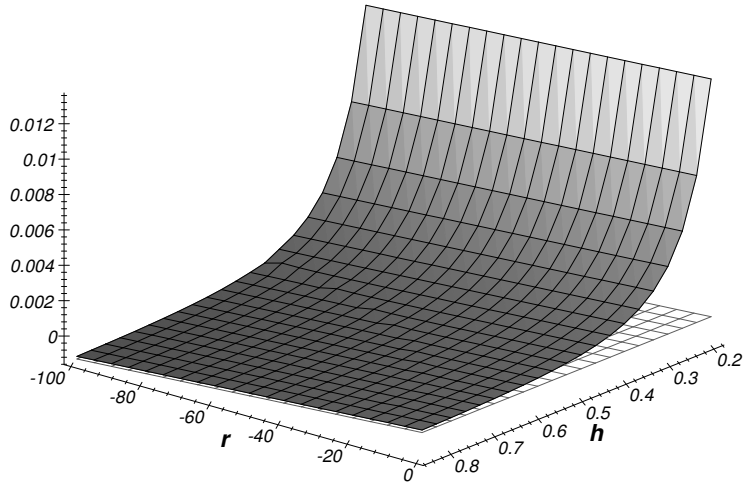


Abbildung 5.42: Rechnung 5.2 - maximale Durchbiegung w^*_{max} $[m]$, h $[m]$, r $[^oC/m^3]$

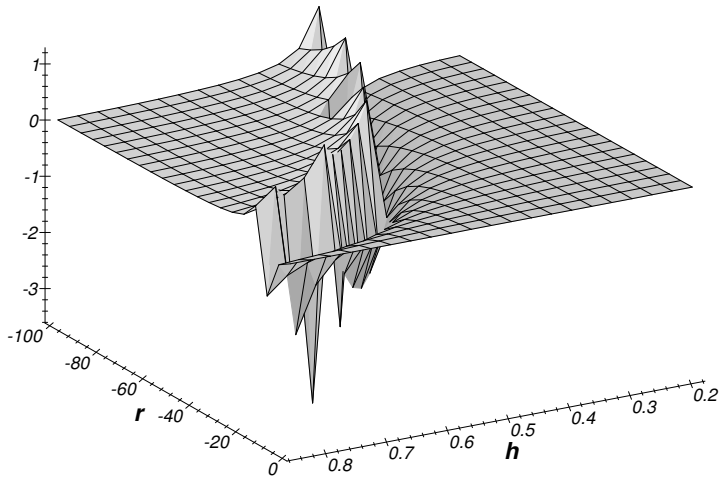


Abbildung 5.43: Rechnung 5.2 – x-Koordinate der max. Durchbiegung w_{max} $[m]$, h $[m]$, r $[^oC/m^3]$

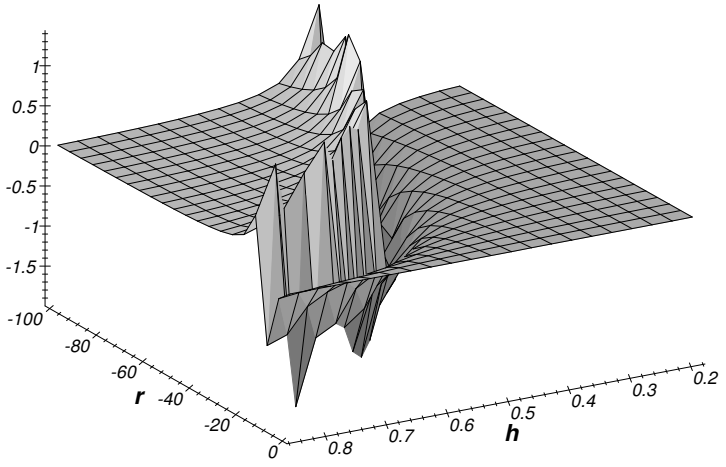


Abbildung 5.44: Rechnung 5.2 – x-Koordinate der max. Durchbiegung w^*_{max} $[m]$, h $[m]$, r $[^oC/m^3]$

5.7 Auswertung von Rechnung 5

Die Ergebnisse, die wir aus $w(x,0)$ und $w^*(x)$ erhalten, unterscheiden sich offenbar kaum. Die Funktionen der betraglich größten Durchbiegungen $w_{max}(h,r)$ und $w^*_{max}(h,r)$ sind auch für verschiedene Material-Parameter nahezu identisch. Auch die Funktionen der x-Koordinate des Ortes der betraglich größten Durchbiegungen w_{max} bzw. w^*_{max} unterscheiden sich nur geringfügig. Lediglich in der Annäherung an die Unstetigkeit rückt die betraglich größte Extremstelle von $w^*(x)$ näher an den Rand heran als für $w(x,0)$. Die Berandung hat folglich bei obiger Wahl von a und b nahezu keinen Einfluß auf das Verhalten von $w(x,0)$.

$w^*_{max}(h,r)$ ist bei reiner Temperaturbelastung eine Ebene. Die Funktionswerte sind von h unabhängig und von r linear abhängig. Bei Belastung durch Treibdruck und Temperatur ist $w^*_{max}(h,r)$ weiterhin von r linear abhängig, die Abhängigkeit von h ist $1/h^3$. Da $w_{max}(h,r)$ und $w^*_{max}(h,r)$ nahezu übereinstimmen, übertragen sich diese Abhängigkeiten auch auf $w_{max}(h,r)$.

Eine maximale Durchbiegung von ca. $3\,mm$ stellt sich für $r_1 - r_2 = -7.4532\,{}^oC/m^2$ bei ungefähr $h = 0.33\,m$, $r = -22.5855\,{}^oC/m^2$ ein. In der Umgebung dieses Punktes sind auch die x-Koordinaten des Ortes der maximalen Durchbiegung von $w(x,0)$ und $w^*(x)$ fast identisch, und für praktische Berechnung kann $w^*(x)$ zur Berechnung herangezogen werden.

Für $h = 0.33\,m$ wird die Durchbiegung der Heizwand unter dem Parametersatz aus Rechnung 1 eindeutig von der Treibdruckbelastung dominiert. Auch Biegemomenten- und Querkraftverläufe entsprechend weitestgehend den Darstellungen von Rechnung 3.

Kapitel 6

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die Durchbiegung von Koksofenheizwänden nach der KIRCHHOFFschen Plattentheorie berechnet. Die Hohlstruktur der Heizwände wurde dabei vernachlässigt. Die Wanddicke h ist im Rahmen dieser Arbeit die Dicke einer Vollplatte, und es werden aus dem Verhalten dieser Vollplatte Rückschlüsse auf das Verhalten einer Wand gezogen, die nicht die Geometrie einer Vollplatte hat. Ziel ist es, unter Berücksichtigung weiterer Arbeiten, insbesondere Finite-Elemente-Berechnungen, Abminderungsfaktoren zu gewinnen, die es gestatten, von der Vollplatte auf die Heizwand mit Hohlstruktur zu schließen.

Die Belastungen der Heizwand, die innerhalb dieser Arbeit berücksichtigt wurden, waren der zum sog. Treibdruck führende Innengasdruck und das Temperaturfeld in der Heizwand. Beide Lasten wurden als invariant über die Ofenlänge angenommen.

Der Einfluß des Temperaturfeldes gegenüber dem Treibdruck auf die Durchbiegung w ist abhängig von der Wanddicke h und einem Parameter r, der für festes h von der Krümmung der Temperaturrandfunktionen bestimmt wird.

Für r wurde unter Berücksichtigung von h ein aus Messungen gewonnener Wert gewählt, und bei konstant belassenen weiteren realistischen Parametern wurden zwei Rechnungen durchgeführt. In der ersten Rechnung wurde als Wanddicke h die wirkliche Dicke einer Heizwand eingesetzt. Die Durchbiegung lag erwartungsgemaß erheblich unter gemessenen Werten; sie wurde durch die Treibdruckbelastung und die Belastung durch Temperatur gleichermaßen bestimmt. In der zweiten Rechnung wurde als Wanddicke h die Differenz der wirklichen Heizwanddicke und der Tiefe eines Heizzuges gewählt, so daß h der Gesamtdicke der beiden Außenwände entsprach. Es stellte sich eine Durchbiegung ein, die wesentlich über gemessenen Werten lag. Sie wurde in diesem Fall einzig von der Treibdruckbelastung bestimmt, der Einfluß des Parameters r, der für das entstehende Temperaturfeld wesentlich ist, war nahezu nicht vorhanden.

Im zweiten Schritt wurde h so gewählt, und r entsprechend angepaßt, daß die sich einstellende maximale Durchbiegung mit gemessenen Werten übereinstimmte. Die Durchbiegung wird bei dieser Wahl der Parameter h und r nahezu vollständig

von der Treibdruckbelastung bstimmt, der Einfluß des Temperaturfeldes ist äußerst gering.

Es zeigte sich des weiteren, daß die Funktion der Durchbiegung des Plattenstreifen sehr gut geeignet ist, die maximale Durchbiegung einer Heizwand anzugeben, wenn h und r derart gewählt werden, daß sich eine realistische Größenordnung der maximalen Durchbiegung einstellt. Die Ergebnisse, die KIRCHHOFFsche Plattentheorie und Theorie des Plattenstreifens in diesem Fall liefern, unterscheiden sich in vernachlässigbar geringem Maße.

Die Dimensionierung von Koksöfen erfolgte in der Vergangenheit zumeist unter Verwendung der einfachen Balkenbiegetheorie unter Vernachlässigung des Einflusses des Temperaturfeldes, da die Durchbiegung als einzig relevante Größe angesehen wurde.

Die durch das Temperaturfeld in der Heizwand induzierte Durchbiegung wirkt der durch Treibdruck Induzierten entgegenwirkt. Wird bei der Dimensionierung nur die Treibdruckbelastung berücksichtigt, erfolgt die Auslegung der Heizwand auf Durchbiegung nach konservativen Gesichtspunkten. Die Theorie des Plattenstreifens unter Einbeziehung des Temperaturfeldes liefert bei geringem Berechnungsaufwand ein weniger konservatives Ergebnis und ist geeignet, Kosten beim Bau einzusparen.

Für die Festigkeitsanalyse einer Heizwand ist aber nicht die Durchbiegung entscheidend, sondern auftretende Spannungen und Biegemomente. Diese werden in den Rechnungen der vorliegenden Arbeit weit mehr von der Temperaturbelastung bestimmt als von der Treibdruckbelastung. Insbesondere die Hauptnormalenspannungen in der Plattenebene werden von der Temperaturbelastung dominiert. Wird die Balkenbiegetheorie unter Vernachlässigung des Temperaturfelds zur Dimensionierung eingesetzt, kann die Festigkeitsanalyse nicht korrekt sein, da dieser Zusammenhang nicht berücksichtigt wird. Auch die Theorie des Plattenstreifens kann für die Festigkeitsanalyse kein geeignetes Werkzeug sein, da betraglich große Biegemomente auch am Plattenrand auftreten.

Die Theorie des Plattenstreifens erscheint uns als äußerst geeignetetes Werkzeug, die Heizwand eines Koksofenens auf Durchbiegung zu dimensionieren. Wird diese Theorie dahingehend erweitert, das Momentengleichgewicht nicht wie üblich am unverformten, sondern am verformten Körper aufzustellen, können auch Normalkräfte durch Gewicht der Ofendecke, Eigengewicht der Wand, Gewicht des Koks–Füllwagens und Behinderung der Wärmeausdehnungen der Wand auf einfache Art und Weise berücksichtigt werden. Die zu lösende Differentialgleichung ist in diesem Fall eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Wenig fruchtbar erscheint es uns, die Plattentheorie durch Überlagerung eines ebenen Spannungszustandes zu erweitern, wenn nur die maximale Durchbiegung von Interesse ist, da es in höchstem Maße fraglich ist, ob die hierdurch gewonnen Ergebnisse wesentlich von denen der Theorie des Plattenstreifens abweichen.

Wird die Dimensionierung der Heizwände anhand von Spannungen und Biegemomenten angestrebt, sollte die Plattentheorie durch Überlagerung eines ebenen Spannungszustandes erweitert werden, um alle auftretenden Belastungen berücksichtigen zu können. Die vorliegende Arbeit zeigt, daß dieser Weg zu neuen Erkenntnissen über

Versagensursachen von Heizwänden führen kann und sollte deshalb weiter beschritten werden.

Kapitel 7

Programm-Code

Die Codierung erfolgte auf einem Linux-PC unter Verwendung des *GNU-C++*-Compilers Version 2.6. Das Projekt zerfällt in folgende Unterprogramme:

trefftz.cc: Hauptprogramm. Orthogonalisierung der biharmonischen Polynome. TREFFTZsches Verfahren. Anpassung der Lösung an die Randbedingungen.

overhead.cc, overhead.h: Ein- und Ausgabe. Informationstext. Parametereingabe. Evaluierung der Lösung und Erzeugung der Ausgabedateien.

biharmps.cc, biharm.h: Erzeugung der biharmonischen Polynome.

polynom2.cc, polynom2.h: Implementierung der Klasse `polynom2d`.

polynom.cc, polynom.h: Implementierung der Klasse `polynom`.

Makefile: Erzeugt aus den Code-Dateien das ausführbare Programm `trefftz`.

../lib/libvm.a: Bibliothek, die Klassen für Vektor- und Matrizenoperationen zur Verfügung stellt. Auch eine Funktion, die ein Standardverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme enthält, ist vorhanden. Beachtenswert ist die Datei `../lib/defs.h`. Durch Änderung von `typedef doublereal REAL;` zu `typedef real REAL;` kann von 16 auf 8-stellige Rechengenauigkeit umgeschaltet werden. In `../lib/Makefile` ist die Shell-Variable `DOUBLE` anzupassen. Die Bibliothek muß dann durch Aufruf von `make` im Verzeichnis `../lib` neu erzeugt werden. Das Makefile für `trefftz` wird beim nächsten Aufruf alle Programm-Codes erneut compilieren und zu einem neuen ausführbaren Programm linken.

Literaturverzeichnis

[2.1] Franck, H.–G.: *Kohleveredelung*, Springer–Verlag, Berlin, 1979.

[2.2] Reerink, W.: *Die Versuchskokerei des Steinkohlenbergbauvereins*, Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen, 1963.

[2.3] Beck, K.–G.: *Prozeßkontrolle der Kokserzeugung*, Verlag Glückauf GmbH, Essen, 1984.

[2.4] Merhoff, Mark A.: *Thermomechanisches Modell zur Dimensionierung hoher Koksöfen*, Dissertation, Clausthal, 1995.

[3.1] Melan, E.; Parkus, H.: *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder*, Springer–Verlag, Wien, 1953.

[3.2] Szilard, R.: *Theory and Analysis of Plates*, Prentice–Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

[3.3] Boley, B. A.; Weiner, J. H.: *Theory of thermal stresses*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1960.

[3.4] Nowacki, W.: *Thermoelasticity*, 2nd Ed., Pergamon Press, Reading, Mass., 1968.

[4.1] Velte, W.: *Direkte Methoden der Variationsrechnung*, Teubner, Stuttgart, 1976.

[4.2] Kneschke, A.: *Differentialgleichungen und Randwertprobleme, Band III*, Teubner, Leibzig, 1968.

[4.3] Zweiling, K.: *Grundlagen einer Theorie der biharmonischen Polynome*, Verlag Technik, Berlin, 1952.